МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»**
Махачкалинский филиал

Кафедра «Математика и Информатика»

Алиева Х.Р., Шамов Э.Ш.

«Дифференциальные уравнения»

Методические указания
и задания для типового расчёта

Махачкала - 2013

УДК 517

Методические указания и задания для типового расчёта по теме «Дифференциальные уравнения».

Махачкала, МФ МАДИ (ГТУ), 20103г., стр.39.

Методические указания предназначены для студентов вторых курсов всех специальностей МФ МАДИ (ГТУ). Цель данных методических указаний – помочь студентам освоить тему «Дифференциальные уравнения» и выполнить типовой расчёт по данной теме. Для этого в методических указаниях приводится необходимая теория с множеством решённых примеров.

Методические указания могут быть использованы и студентами заочной формы обучения.

Составители: старший преподаватель кафедры
МиИ МФ МАДИ (ГТУ) Алиева Х.Р.,
ассистент кафедры ВМ ДГТУ
Шамов Э.Ш.

Рецензенты: к.ф.-м.н., профессор кафедры ВМ ДГТУ
Хийирбеков Т.Э.,
к.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой
МиИ МАДИ (ГТУ) Курбанов К.О.

Печатается согласно постановления Учёного совета Махачкалинского филиала МАДИ (ГТУ) от 24 апреля 2013 года.

Оглавление

§ 1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, содержащее независимые переменные, искомую функцию и её производные.

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется порядком уравнения. Если независимая переменная только одна, то уравнение называется обыкновенным. В противном случае оно называется уравнением с частными производными.

Примеры.

1. Уравнение вида $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$ (1), есть обыкновенное ДУ $n-го$ порядка. Здесь y – искомая функция от независимой переменной x; $y', y'',..., y^{(n)}$ - производные y по x, а F – заданная функция своих аргументов. Если F есть полином относительно $y', y'',..., y^{(n)}$, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью уравнения.* В теории обыкновенных ДУ рассматриваются главным образом уравнения, разрешённые относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

2. Совокупность уравнений:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n'\right)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n\left(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2'..., y_n'\right)=0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $y_1, y_2,..., y_n$ - искомые функции от x, называется системой обыкновенных ДУ. Система уравнений, разрешённая относительно производных от искомых функций

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, y_2,..., y_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, y_2,..., y_n\right), \end{cases} \qquad (4)$$

называется *нормальной системой* ДУ.

3. Уравнение вида $\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$, (5)

где u – искомая функция от $x_1, x_2, .., x_n$; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}$ - частные производные от u по $x_1, x_2, ..., x_n$, а Φ - заданная функция от своих аргументов, является уравнением с частными производными первого порядка. Так, уравнение $y'' + 3xy' - x^3 y^2 = 0$ - второго порядка; $\frac{d^3 S}{dt^2} + tS^3 \frac{dS}{dt} = 7$ - третьего порядка; $y' + 5xy = tgx$ - первого порядка; $(y'')^3 + 5(y')^4 y + 7x = 0$ - второго порядка третьей степени; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - уравнение с частными производными второго порядка.

Решением ДУ (обыкновенного или с частными производными) называется функция, имеющая непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения, и обращающая это уравнение в тождество.

Решением системы ДУ (3) называется совокупность n- функций $y_1, y_2, ..., y_n$, имеющих непрерывные производные и обращающих все уравнения этой системы в тождества. Кривая, соответствующая решению (1) или (3) называется интегральной кривой уравнения (1) или системы (3).

Отыскание частного интеграла ДУ $n-го$ порядка $(n = 1,2,3...)$, удовлетворяющего n- начальным условиям вида

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', .., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{6}$$

называется задачей Коши. По этим n- начальными условиями определяются значения всех n- произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$, входящих в общий интеграл уравнения $n-го$ порядка. Аналогично ставится задача Коши для системы (3) и уравнения (5). В случае $n = 1$ имеем одно начальное условие $y(x_0) = y_0$. Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку.

Примеры.

1.Уравнение $y' = 2x$ (7) имеет семейство решений $y = x^2 + c$, (8). Интегральными кривыми являются параболы

2. Найти решение уравнения (7), удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 2$, (9). Для решения поставленной задачи Коши подчиняем (8) условию (9). Тогда получим $2 = 1 + c$, откуда $c = 1$, т.е. $y = x^2 + 1$.

Имеет место теорема существования и единственности задачи Коши для уравнения первого порядка типа (2).

Теорема Коши. Если правая часть определена в области $R:\{|x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b\}$, где a и b - заданные положительные числа и удовлетворяет в ней двум условиям: 1) $f(x,y)$ непрерывна; 2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$, где K - постоянное число, то уравнение (2) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию в интервале $|x - x_0| \le h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $|f(x,y)| \le M$ в R.

Пример 1. Установить область существования и единственности решения для уравнения $y' = 2\sqrt{y}$. Здесь правая часть определена и непрерывна при $y \ge 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ существует и непрерывна при $y > 0$. Следовательно, областью существования и единственности решения задачи Коши является верхняя полуплоскость $(y > 0)$.

Особое решение.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым. Предположим, что уравнение $y' = f(x,y)$ допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых $\Phi(x,y,c) = 0$, где c - параметр. Предположим, что это семейство кривых имеет огибающую, т.е. такую кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства, и ни на каком участке не совпадает с одной из кривых семейства. Очевидно, что огибающая семейства интегральных кривых уравнения является решением этого уравнения и притом особым.

Для того, чтобы найти особое решение, если оно существует, надо исключить параметр c из системы $\Phi(x, y, c) = 0$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$ (10)

При этом надо иметь в виду, что система (10) может вообще не определять никакой кривой. Тогда уравнение не будет иметь особого решения. Но даже, когда (10) определяет кривую, то она может оказаться не огибающей, а геометрическим местом особых точек кривых семейства и, следовательно, все-таки не быть особым интегралом.

Отметим, наконец, что особым решением могут оказаться решения, теряемые в результате преобразования данного ДУ, которые выполняются в процессе интегрирования. Например, при делении обеих частей уравнения на некоторую функцию $\omega(x, y)$ мы можем потерять решения, обращающие эту функцию в нуль.

Интегрировать уравнение примера 1 можно так: разделим обе части на $2\sqrt{y}$ и умножим на dx получим: $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$ $\left(2\sqrt{y} = 0?\right)$. В скобках мы будем указывать то уравнение, которое нужно рассматривать после интегрирования, ибо деление на $2\sqrt{y}$ может привести к потере решений.

Интегрируя, получим: $\sqrt{y} = x + c\ (x + c > 0)$ или $y = (x + c)^2$ $(x > -c)$. Из уравнения $2\sqrt{y} = 0$ находим $y = 0$, функция $y = 0$ является решением уравнения. Покажем, что $y = 0$ есть особое решение. Найдем огибающую семейства интегральных кривых $y = (x + c)^2$, $2(x + c) = 0$.

Исключая параметр c получим $y = 0$. Эта функция удовлетворяет исходному уравнению и в каждой точке оси абсцисс нарушается условие единственности. Следовательно, $y = 0$ есть особое решение.

Пример 2. Решить ДУ $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$.

Деля обе части уравнения на y^2-1 и умножая на dx получим:

$\frac{dy}{y^2-1}=dx,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=dx$. Интегрируя обе части последнего равенства получим: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+c$. В результате деления мы потеряли решения $y=\pm1$. Эти прямые являются частными решениями, т.к. правая часть удовлетворяет условиям теоремы Коши.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $2x\sqrt{y}dx+\left(1-x^2\right)dy=0$.
и выделить интегральные кривые, проходящие через заданные точки $M_1(0;1), M_2(1;1), M_3(0;0), M_4(1;0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности.

Разделяя переменные в уравнении, имеем $\frac{2x}{1-x^2}dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$, $\left(1-x^2=0,\ y=0?\right)$. Интегрируя, получим общий интеграл: $-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=c$. Из уравнения $1-x^2=0$ находим $x=\pm1$. Функции $x=1\ (y\neq0)$ и $x=-1\ (y\neq0)$ являются частными решениями, потому что они, во-первых, удовлетворяют исходному уравнению и через каждую точку, лежащей на них проходит единственная кривая. Уравнение $\sqrt{y}=0$ дает $y=0$. Решение $y=0\ (x\neq\pm1)$ особое, потому что в каждой точке $y=0\ (x\neq\pm1)$ нарушается единственность. Например, через точку $M(2;0)$ проходит решение $y=0$ и решение, которое содержится в общем решении: $-\ln\left|1-2^2\right|=c;\ c=-\ln3$, $-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=-\ln3$.Через $M_1(0;1)$ проходит одна, и только одна интегральная кривая. Её уравнение можно получить, полагая в общем решении $x=0,\ y=1$, находим $c=2$: $-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=2$. Через $M_2(1;1)$ тоже проходит одна интегральная кривая, а именно $x=1\ (y>0)$. Точка $M_3(0;0)$ лежит на особом решении $y=0$. Кроме особого решения $y=0$, через неё проходит интегральная кривая: $-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=0$. В точке $M_4(1;0)$ производная $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x\sqrt{y}}{1-x^2}$ не определена. К ней примыкают решения $x=1\,(y\neq 0)$.

§ 2. **Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Однородные уравнения и приводящиеся к ним.**

Дифференциальное уравнение вида $f_1(x)dx+f_2(y)dy=0$, (1)
где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ суть функции, зависящие соответственно только от x и только от y называется уравнением с разделёнными переменными. Интегрируя, почленно, находим общий интеграл (1): $\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=c$.

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0$, (2)
в котором коэффициенты при dx и dy являются произведением функций, зависящих только от одной из переменных x и y называется уравнением с разделяющими переменными, так как делением на $f_2(y)f_3(x)$ оно приводится к виду (1). Его общий интеграл имеет вид: $\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=c$, $(f_2(y)f_3(x)=0?)$. Если уравнения $f_2(y)=0$ и $f_3(x)=0$ имеют вещественные решения $y=b,\ x=a$, то функции $y=b(x\neq a)$, $x=a(y\neq b)$ будучи всегда решениями уравнения (2) могут оказаться особыми решениями, как например, в примере 3 § 1.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$.

Разделив обе части уравнения на $(x^2-1)(y^2-1)$ получим уравнение с разделенными переменными $\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$, $(x^2-1=0, y^2-1=0?)$. Поэтому общим интегралом будет $(x^2-1)(y^2-1)=c$.Особых решений нет, потому что решения $x=\pm1(y\neq\pm1)$, $y=\pm1(x\neq\pm1)$ содержатся в общем решении при $c=0$.

Однородные уравнения и приводящиеся к ним.

Уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т.е. уравнение вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (3). Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$.

Уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, (4)

в котором M и N суть однородные функции одного и того же измерения будет однородным. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией измерения K, если $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$, (5).

Ясно, что в этом случае уравнение (4) можно привести к виду (3).

Замечание. Так как заменой $y = ux$ однородное уравнение (4) приводится к уравнению с разделяющимися переменными $[M(1,u) + N(1,u)u]dx + xN(1,u)du = 0$,то однородное уравнение может иметь особые решения вида $y = bx(x \neq 0)$, где b корень уравнения $M(1,u) + N(1,u)u = 0$. Кроме того, особыми решениями могут быть полуоси OY: $x = 0$ $(y \neq 0)$.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y + xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

Вначале устанавливаем, что данное уравнение – однородное: $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{x}{y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, а затем, делая замену $y = ux$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $u + x\frac{du}{dx} = u(1 + \ln u)$ или $x\frac{du}{dx} = u \ln u$. Разделяя переменные, $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$, $(u \ln u = 0\,?)$, и интегрируя, получим: $\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$, $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln c$. Исключая вспомогательную переменную u найдем искомый общий интеграл: $|\ln u| = c|x| \to u = e^{cx}$; $y = xe^{cx}$. Заметим, что $u = 0$ не является решением, а решение $\ln u = 0$ или $u = 1$, или $y = x$ получается из общего решения при $c = 0$. Следовательно, мы не теряем решение.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $xdy + \left(\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y\right)dx = 0$.

Деля обе части уравнения на xdx, мы получим, что правая часть есть функция $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, поэтому полагая $y = ux$, придём к уравнению с разделяющими переменными $x^2 du + \sqrt{u-1}dx = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получим: $2\sqrt{u-1} - \frac{1}{x} = c$ $\left(\sqrt{u-1} = 0?\right)$, или $2\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - \frac{1}{x} = c$. Заметим, что при разделение переменных мы могли потерять решение $u = 1$ или $y = x$. Нетрудно видеть, что через каждую точку решения $y = x$ и проходит другая интегральная кривая, следовательно, это особое решение.

Уравнения $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ приводится к однородным подстановкой $x = \xi + x_0,\ y = \eta + y_0$, где (x_0, y_0) решение системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$. Если же $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то подстановка $\eta = a_1 x + b_1 y$ позволяет разделить переменные.

Пример 4. Найти общий интеграл ДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{-x + y + 1}$.

Положим $x = \xi + x_0,\ y = \eta + y_0$. Тогда уравнение примет вид $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta + (x_0 + y_0 - 3)}{-\xi + \eta + (-x_0 + y_0 + 1)}$. Выберем x_0, y_0, так, чтобы удовлетворялась система уравнений $\begin{cases} x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ -x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases}$, т.е. $x_0 = 2,\ y_0 = 1$. Тогда уравнение примет вид: $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-\xi + \eta}$. Введя новое переменное u, положив $\eta = u\xi$, получим:

$\xi \dfrac{du}{d\xi} + u = \dfrac{1+u}{-1+u}$. После преобразования и разделения переменных будем имеем: $\dfrac{(u-1)du}{u^2-2u-1} + \dfrac{d\xi}{\xi} = 0, \left(u^2-2u-1=0\,?\right)$. Откуда $\dfrac{1}{2}\ln\left|u^2-2u-1\right| + \ln|\xi| = \dfrac{1}{2}\ln c$, $\xi^2\left(u^2-2u-1\right) = c, \to \eta^2 - 2\eta\xi - \xi^2 = c$. Заметим, что здесь потеря решения не происходит. Возвращаясь к прежним переменным x и y, получим общий интеграл $(y-1)^2 - 2(y-1)(x-2) - (x-2)^2 = c$ или $y^2 - 2xy + 2y - x^2 + 6x = c + 7$.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

Положим $3x - 4y = z$, тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\dfrac{dz}{dx}$ и уравнение примет вид $\left(\dfrac{4}{z+1} - 1\right)dz = dx$, откуда $4\ln|z+1| - z = x + 4c$. Возвращаясь к прежней функции, будем иметь $\ln|3x-4y+1| = x - y + c$.

§ 3.Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

ДУ называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции и её производной y'. Общий вид линейного уравнения первого порядка $y' + P(x)y = Q(x)$.(1)

Если правая часть (1) $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется линейным однородным, в противном случае оно называется неоднородным.

Покажем на примерах два способа интегрирования этого уравнения:

а) Способ подстановки; б) Способ вариации произвольного постоянного.

Уравнение (1) при $Q(x) \equiv 0$ одновременно является уравнением с разделяющимися переменными.

а) Способ подстановки:

Пример 1. Решить уравнение $y' - yctgx = \sin x$.

Данное уравнение линейное. Полагаем $y = uv$. Тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду $u'v + u(v' - vctgx) = \sin x$. Так как одно из вспомогательных функций u или v можно взять произвольно, то выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' - vctgx = 0$. Тогда для отыскания u получим уравнение $u'v = \sin x$. Решая первое из этих уравнений, найдем v: $\frac{dv}{v} = ctgxdx$; $\ln|v| = \ln|\sin x|$; $v = \sin x$. Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения: $u' \sin x = \sin x$; $du = dx$; $u = x + c$.Зная u и v находим искомую функцию y: $y = uv = (x + c)\sin x$.

б) Способ вариации произвольного постоянного.

Сущность этого метода заключается в том, что решают соответствующее однородное уравнение и, варьируя (делая c функцией от x) произвольную постоянную, подбираем $c(x)$, так чтобы решение однородного уравнения стало решением неоднородного уравнения.

Пример 2. Методом вариации произвольного постоянного найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = 3x$.

Решаем соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{1}{x}y = 0$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$, откуда $\ln|y| + \ln|x| = \ln c$ или $y = \frac{c}{x}$. Ясно, что при постоянном c, $y = \frac{c}{x}$ не будет являться решением исходного неоднородного уравнения. Для нахождения решения неоднородного уравнения варьируем произвольную постоянную, т.е. $y = \frac{c(x)}{x}$. Найдя производную и подставляя в исходное уравнение, будем иметь: $\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{c(x)}{x}=3x$

или $c'(x)=3x^2$,откуда $c(x)=x^3$. Подставляя вместо $c(x)$, получим $y=x^2+\frac{c}{x}$.

§ 4. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Уравнением Бернулли называется ДУ первого порядка вида $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha\neq 0, \alpha\neq 1$ (при $\alpha=0$, уравнение является линейным, а при $\alpha=1$– уравнением с разделяющимися переменными). Так как заменой $y^{1-\alpha}=z$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению, то все методы интегрирования линейного уравнения переносятся к уравнению Бернулли.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y^2y'+xy^3=1$.

Разделив обе части уравнения на x^2y^2, получим: $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2y^2}$ и убеждаемся, что это уравнение Бернулли, где $P(x)=x^{-1}, Q(x)=x^{-2}$. Заменяя функцию y по формуле $y=uv$ имеем $u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2u^2v^2}$. Отсюда, как и в случае линейного уравнения получаем два уравнения с разделяющимися переменными: **1)** $v'+\frac{v}{x}=0$; **2)** $u'v=\frac{1}{x^2u^2v^2}$. Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения $\frac{dv}{v}+\frac{dx}{x}=0, \quad \ln v+\ln x=0, \quad vx=1, \quad v=\frac{1}{x}$. Подставляя v во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл данного уравнения:

$\frac{u'}{x}=\frac{1}{u^2}$, $u^2du=xdx$, $\frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{3}$, $u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+c}$. Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения $y=uv=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{c}{x^3}}$.

Пример 2. Решить уравнение $2xydx+\left(y-x^2\right)dy=0$.

Преобразовав данное уравнение к виду $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{2y}=-\frac{1}{2x}$ выясняем, что оно является уравнением Бернулли, если рассматривать x как функцию от y. Поэтому решение будем искать в виде $x=uv$. Тогда решение уравнения сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций $v\left(\frac{du}{dy}-\frac{u}{2y}\right)+\left(\frac{dv}{dy}u+\frac{1}{2uv}\right)=0$. Решая уравнение $\frac{du}{dy}-\frac{u}{2y}=0$ возьмем его частное решение $u=\sqrt{y}$. Тогда мы придем к уравнению $\frac{dv}{dy}\sqrt{y}+\frac{1}{2v\sqrt{y}}=0,\ 2vdv+\frac{dy}{y}=0$.Общим решением является $v^2=\ln\frac{c}{y}$. Подставляя $u^2=y,\ v^2=\ln\frac{c}{y}$, получим общий интеграл исходного уравнения $x^2=y\ln\frac{c}{y}$.

Уравнение в полных дифференциалах.

Если в уравнении $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$,(1) левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ от независимых переменных x и y, то оно называется уравнением в полных дифференциалах. Это уравнение можно переписать в виде $du=0$, так, что его общий интеграл имеет вид $u(x,y)=c$. (2).

Необходимым и достаточным условием, чтобы уравнение (1) было, уравнением в полных дифференциалах является выполнение условия

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$, (3). Если условие (3) выполнено, то общий интеграл можно записать в виде $\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, y)dy = c$ или

$\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = c$, (4), где нижние пределы x_0, y_0 можно выбирать произвольно, так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области непрерывности функций $M(x, y), N(x, y)$.

Обоснование формулы (4) в следующем: так как (1) есть уравнение в полных дифференциалах, то имеет место $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, (5). Тогда из одного из соотношений (5) находим $u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$, где x_0 – абсцисса любой точки из области существования решения. При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (5). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по y и результат приравняем $N(x, y)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = \\ &= N(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y), \quad \varphi'(y) = N(x_0, y). \end{aligned} \tag{6}$$

При получении равенства (6) мы использовали равенство (3) и свойства интеграла, откуда $\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + c$. Подставляя выражение $\varphi(y)$ и учитывая, что полный дифференциал есть нуль, получим (4).

Пример 3. Решить уравнение $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$.

Проверяем, не есть ли это уравнение в полных дифференциалах. Здесь $M(x,y)=3x^2+6xy^2$, $M(x,y)=6x^2y+4y^3$, тогда $\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy, \dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy$, так, что условие (3) выполнено и, следовательно, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$, то, следовательно,

$u=\int\limits_0^x (3x^2+6xy^2)dx+\varphi(y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$. Дифференцируя, это соотношение по y и учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$, получим

$6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3,\ \varphi'(y)=4y^3$. Из последнего равенства следует $\varphi(y)=y^4+c_1$. Следовательно $u=x^3+3x^2y^2+y^4+c_1$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.

Интегрирующий множитель.

Если условие (3) не выполнено, то ДУ (1) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако это уравнение можно превратить в уравнение полных дифференциалах умножением на подходящую функцию $\mu(x,y)$. Такая функция носит название интегрирующего множителя для данного ДУ. Оказывается, что для всякого ДУ существует интегрирующий множитель, хотя это не означает, что его можно легко найти. Покажем, как ищется интегрирующий множитель уравнения (1). Умножим обе части (1) на $\mu(x,y)$: $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$.

Полученное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, следовательно, $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, или $N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$. (7)

Для нахождения $\mu(x,y)$ нужно решить ДУ (7) с частными производными. В общем случае эта задача является более сложной, чем интегрирование обыкновенного ДУ (1). Она значительно упрощается, если μ зависит только от одного переменного x или y.

1) Пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда из (7) будем иметь:

$$\frac{d(\mu(x))}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx. \ (8), \ \text{откуда} \quad \ln \mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx, \ (9) \ \text{где}$$

произвольное постоянное c принято равным нулю, поскольку нам достаточно иметь какой-нибудь один интегрирующий множитель.

2) Если $\mu = \mu(y)$ аналогично из уравнения (7) получим:

$$\ln \mu(y) = -\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy. \tag{10}$$

Замечание. При умножении на интегрирующий множитель может случиться, что мы потеряли некоторые решения (эти решения могут быть особыми) или получим посторонние решения. Первое может иметь место, когда во всех точках некоторой кривой μ обращается в бесконечность, второе – когда μ обращается в нуль.

Пример 4. Решить уравнение $\left(1 - x^2 y\right)dx + x^2(y - x)dy = 0$. (11)

Проверим, не имеет ли оно интегрирующий множитель, зависящий только от x? Имеем: $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}$, т.е. отношение не зависит от y. Поэтому, $\ln \mu(x) = -\int \frac{2dx}{x} = -2\ln x = \ln \frac{1}{x^2}$, $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Умножая обе части (11) на $\frac{1}{x^2}$, получим: $\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$,(12). Для контроля вычислений убеждается, что это – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = y - x$. Из второго равенства интегрируя, получим: $u = \frac{y^2}{2} - xy + \varphi(x)$. Для нахождения $\varphi(x)$ имеем

$\frac{\partial u}{\partial x} = -y + \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} - y,\ \varphi'(x) = \frac{1}{x^2}$.Откуда $\varphi(x) = -\frac{1}{x} + c_1$. Подставляя вместо $\varphi(x)$ его выражение и приравнивая произвольной постоянной получим: $-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = c$, (13).

Замечание. Прежде чем считать интегрирование данного уравнения законченным, нужно посмотреть, не обращается ли μ в ∞ или в 0 .Хотя μ и обращается в бесконечность при $x = 0$ и $x = 0$ является решением данного уравнения (11), но это решение частное; оно содержится в общем интеграле (13) при $c = \infty$. В нуль μ не обращается.

§ 5. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.

Уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной, имеет следующий общий вид: $F(x, y, y') = 0$, (1). Уравнение (1), так же как и уравнение, разрешённое относительно производной, задаёт на плоскости (x, y) некоторое поле направлений, если через каждую точку (x, y), в которой это уравнение имеет вещественные решения относительно y', провести отрезки, образующие с положительным направлением оси OX углы, тангенсы которых равны значениям y', найденным из уравнения (1). Чтобы найти направления поля, определяемые уравнением (1) в точке (x_0, y_0), нужно найти все вещественные решения уравнения.

Пример 1. Найти все решения и найти направления поля в точке $M(1,1)$ уравнения $(y')^2 - 4y = 0$, (2).

Это уравнение распадается на два уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ и $y' = -2\sqrt{y}$, (3). Разделяя, переменные и интегрируя первое уравнение, получим:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx,\ \sqrt{y} = x + c,\ y = (x + c)^2,\ (x \geq -c), \qquad (4),$$

а второе

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=-dx,\ \sqrt{y}=-x-c,\ y=(x+c)^2,\ (x\le -c), \qquad (5).$$

Так что, каждая парабола является интегральной кривой (2). Кроме того, решением уравнения (2) будет $y=0$. Уравнение (2) имеет также бесчисленное множество решений, склеенных из отрезков указанных выше решений. Например,

$$y=\begin{cases}0,\ при\ x\le 1,\\ (x-1)^2,\ при\ x>1,\end{cases} \quad и \quad y=\begin{cases}(x+1)^2,\ при\ x<-1,\\ 0,\ при\ -1\le x\le 1,\\ (x-1)^2\ при\ x>1.\end{cases}$$

Определим направление поля в точке (1;1): $y_1'=2$ и $y_2'=-2$. Укажем, что во всякой точке, лежащей на оси OX, направление поля только одно $y'(x,0)=0$.

Для уравнения (1) имеет место следующая теорема существования и единственности.

Теорема. Предположим, что $F(x,y,y')$ удовлетворяет следующим трём условиям: **1)** $F(x,y,y')$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки $(x_0;y_0;y_0')$. **2)** Функция F в точке $(x_0;y_0;y_0')$ обращается в нуль. **3)** Производная $F'_{y'}$ в этой точке не равна нулю. Тогда существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения (1), определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x=x_0$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, такое что $y'(x_0)=y_0'$.

Пример 2. Исследовать вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $(y')^2-4y=0$, с начальным условием $y(0)=1$, (6).

Для этого воспользуемся решением примера (1) формулами (4), (5) и такое, что $y'=+2$ при $x=0$ или $y'=-2$ при $x=0$. Рассмотрим случай

$y' = 2$ при $x = 0$. Нетрудно видеть, что условия 1) и 2), приведенной выше теоремы выполнены. Так как $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(0;1;2)} = 2y'|_{(0;1;2)} = 4 \neq 0$, то условие 3) тоже выполнено. Поэтому существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию (6) и такое, что $y'(0) = 2$. То же заключение имеет место и в случае $y' = -2$ при $x = 0$. Следовательно, решение задачи Коши для данного уравнения с начальным условием (6) существует и единственно.

Замечание. Чтобы найти особое решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ составляют систему уравнений: $F(x, y, y') = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$ (7) и исключают из этой системы y'. Полученное соотношение x и y может оказаться особым решением.

Пример 3. В примере 1 мы показали, что уравнение (2) имеет семейство решений $y = (x + c)^2$. Кроме того, его решением является ось $OX : y = 0$. Это решение особое, ибо в каждой её точке $(x_0; 0)$ нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, для исследования на особое решение используем равенство (7) $\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0, \\ 2y' = 0, \end{cases} \to y = 0$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $(y')^2 = 4x^2$. Решая уравнение, относительно y' имеем $y' = 2x,\ y = -2x$. Интегрируя эти уравнения, получим два семейства интегральных кривых $y = x^2 + c,\ y = -x^2 + c$. Рассмотрев (7) будем иметь $\begin{cases} (y')^2 = 4x^2, \\ y' = 0, \end{cases} \to x = 0.$ Нетрудно, видеть, что $x = 0$ является геометрическим местом точек прикосновения интегральных кривых уравнений $y' = 2x,\ y' = -2x$, на которых распадается исходное уравнение.

Приведем некоторые типы уравнений, не разрешённые относительно производной, и на примерах покажем методы их решения.

I. Уравнение первого порядка $n-$ ой степени

$$(y')^n + P_1(y')^{n-1} + \ldots + P_{n-1}y' + P_n y = 0.$$

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $(y')^2 - xy = 0$.

Разлагая левую часть уравнения на множители, получим, $\left(y' - \sqrt{xy}\right)\left(y' + \sqrt{xy}\right) = 0,$ откуда $y' - \sqrt{xy} = 0$ и $y' + \sqrt{xy} = 0$. Оба эти уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Их общие интегралы $\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3} - c = 0,$ $\sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - c = 0$. Поэтому общий интеграл имеет вид $\left(\sqrt{y} - c\right)^2 - \frac{x^3}{3} = 0$.

II. Уравнение, разрешённое относительно y и не содержащее x, т.е. $y = \varphi(y')$.

Пример 6. Найти общее решение в параметрической форме уравнения $y = (y')^2 + 2(y')^3$.

Положим $y' = p$. Тогда $y = p^2 + 2p^3$. Продифференцировав по x, получим $y' = \left(2p + 6p^2\right)\frac{dp}{dx}$, или, так как $y' = p$ и можно сократить на p имеем $1 = (2 + 6p)\frac{dp}{dx}$.Отсюда $dx = (2 + 6p)dp$ и $x = 2p + 3p^2 + c$. Общее решение запишем так $x = 2p + 3p^2 + c,$ $y = p^2 + 2p^3$. При этом мы предположим, что $p \neq 0$.Если же $p = 0$, то это дает решение $y = c$, которое как легко видеть, удовлетворяет уравнению лишь при $c = 0$.

III. Уравнение, разрешённое относительно x и не содержащее y, т.е. $x = \varphi(y')$.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $x = y' \sin y'$ в параметрической форме.

Положим $y' = p$, тогда $x = p\sin p$. Равенство $\dfrac{dy}{dx} = p$ перепишем в форме $dy = pdx$, так как

$$y = \int pdx = px - \int xdp = px - \int p\sin pdp = px + p\cos p - \int \cos pdp =$$

$= px + p\cos p - \sin p + c.$ Общее решение запишется так $x = p\sin p,$

$y = p^2 \sin p + p\cos p - \sin p + c$.

IV. Уравнение, не содержащее x или y, но не обязательно разрешённое относительно y или x.

Это уравнение вида $F(y, y') = 0$ или $F(x, y') = 0$.

Пример 8. Решить уравнение $y = \sqrt{(y')^2 + 1}$.

Положим $y' = sht$, тогда получим $y = \sqrt{sh^2 t + 1} = cht$, так как, $sh^2 t - ch^2 t = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 = -1,\ y' = (cht)' = sht$. Тогда $dy = y'$, $shtdt = shtdx$, $dt = dx,\ x = t + c.$Поэтому $x = t + c$, $y = cht$ или $y = ch(x - c)$. Исследуем на особое решение. Для этого используем (7)

$$\begin{cases} y = \sqrt{(y')^2 + 1}, \\ \dfrac{y'}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = 0, \end{cases}$$

исключая y', получим $y = 1$. Прямая $y = 1$ есть особое решение, т.к. она есть огибающая семейства интегральных кривых и удовлетворяет исходному уравнению.

V. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнения Лагранжа и Клеро так же допускают параметризацию. Уравнение $y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$, где $\varphi(y') \neq y'$ называют уравнением Лагранжа, если $\varphi(y') = y'$, то $y = xy' + \psi(y')$ называется уравнением Клеро.

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y = x(y')^2 + (y')^2$.

Положим $y' = p$. Тогда $y = xp^2 + p^2 = (x+1)p^2$. Продифференцировав по x, имеем $y' = p^2 + 2(x+1)p\frac{dp}{dx}$. Подставляя вместо $y' = p$, сокращая на p и разделяя переменные, получим, $\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}$, откуда $\ln(x+1) = -2\ln(1-p) + 2\ln c$. Производя потенцирование, находим $x+1 = \frac{c^2}{(1-p)^2}$. Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид $x = \frac{c^2}{(1-p)^2} - 1$, $y = \frac{c^2 p^2}{(1-p)^2}$. Исключив параметр p после несложных преобразований получим $y = \left(\sqrt{x+1} - c\right)^2$.Подчеркнём, что это уравнение Лагранжа имеет особые решения $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$, где p_0- любой из корней уравнения $\varphi(p) = p$. Для нашего примера $\varphi(p) = p^2$, $\psi(p) = p^2$, поэтому, решая уравнение $p^2 = p$ найдем $p_0 = 0,\ p_0 = 1$. Следовательно $y = 0$- особое решение, а $y = x+1$ не является особым решением, так как оно получается из общего при $c = 0$.

Практическое правило. Чтобы получить общее решение уравнения Клеро надо символ y' заменить символом c в уравнении Клеро $y = cx + \psi(c)$. Дифференцируя по c и исключая c из системы двух уравнений (общего решения и результата дифференцирования) получаем особое решение.

§ 6.Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

I. Простейшим типом уравнения $n-го$ порядка, допускающее понижение порядка является уравнением вида : $y^{(n)} = f(x)$, (1).

Интегрируя последовательно n- раз получим общее решение.

II. Если уравнение вида: $F\left(x, y^{(n)}\right)=0$, (2) не разрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление $x=\varphi(t),\ y^{(n)}=\psi(t)$. Тогда, пользуясь соотношением, $d\left(y^{(n-1)}\right)=y^{(n)}dx$, получим $dy^{(n-1)}=\psi(t)\varphi'(t)dt$. Интегрируя последнее, найдем $y^{(n-1)}$. Аналогично продолжая, найдем $y^{(n-2)},....., y'$.

III. Уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных, т.е. уравнение

$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}\right)=0,\ (1\le k\le n)$,(3), допускает понижение порядка на k единиц заменой $y^{(\kappa)}=z$.

IV. Уравнение не содержащее независимой переменной x:

$F\left(y, y',..., y^{(n)}\right)=0$, (4) допускает понижение порядка заменой $y'=z$ и приняв y за независимую переменную.

V. Уравнение $F\left(x, y, y',..., y^{(n)}\right)=0$, (5), в котором левая часть является однородной функцией относительно $y, y',..., y^{(n)}$, т.е.

$F\left(x, ty, ty',..., ty^{(n)}\right)=t^m F\left(x, y, y',..., y^{(n)}\right)$, допускает понижение порядка на единицу при помощи подстановки $y'=yz$.

VI. Если левая часть уравнения $F\left(x, y, y',..., y^{(n)}\right)=0$, (6) является точной производной от некоторой функции, то интегрируя, понижаем порядок на единицу.

Пример 1. Решить уравнение $y'''=\sin x-\cos x$.

Интегрируя обе части уравнения трижды получим:

$y''=-\cos x-\sin x+2c_1$, $y'=-\sin x+\cos x+2c_1x+c_2$,

$y=\cos x+\sin x+c_1x^2+c_2x+c_3$.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x-e^{y''}+\left(y''\right)^2=0$.

Обозначая $y'' = t$, получим: $x = e^t - t^2$. Далее

$d(y') = y''dx = t(e^t - 2t)dt$, откуда $y' = \int t(e^t - 2t)dt = e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + c_1$.

Поэтому, $dy = y'dx = \left[e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + c_1\right](e^t - 2t)dt =$

$= \left[e^{2t}(t-1) - \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - c_1\right)e^t + \frac{4}{3}t^4 - 2c_1 t\right]dt$. Интегрируя, находим

$y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} - (\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - c_1)e^t + \frac{4}{15}t^5 - c_1 t^2 + c_2$. Присоединяя сюда $x = e^t - t^2$, получим общее решение исходного уравнения в параметрической форме.

Пример 3. Решить уравнение $(y')^2 - yy'' = 1$.

Полагая, что $y' = z,\ y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$, получим: $z^2 - yz\frac{dz}{dy} = 1$ или

$yz\frac{dz}{dy} = z^2 - 1,\ \frac{zdz}{z^2 - 1} = \frac{dy}{y}\ \ (z^2 - 1 = 0\,?),\ \ \frac{1}{2}\ln\left|z^2 - 1\right| = \ln|y| + \frac{1}{2}\ln c_1$, или

$z^2 - 1 = c_1 y^2$, $z = \pm\sqrt{1 + c_1 y^2}$, или $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1 + c_1 y^2},\ \pm\frac{dy}{\sqrt{1 + c_1 y^2}} = dx,$

$x + c_2 = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{1 + c_1 y^2}}$.Исследуем $z^2 - 1 = 0$ или $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$, или $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. Интегрируя, получим $y = \pm x + c^*$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

Нетрудно видеть, что левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $(1 + x^2)y'$, а правая – от функции $\frac{x^4}{4}$, т.е. уравнение можно переписать так $((1 + x^2)y')' = \left(\frac{x^4}{4}\right)'$. Отсюда интегрированием получаем

$\left(1+x^2\right)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{c_1}{4}$, или $dy=\frac{x^4+c_1}{4\left(1+x^2\right)}dx$. Следовательно,

$y=\int\frac{x^4+c_1}{4\left(1+x^2\right)}dx=\int\left[\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)+\frac{c_1+1}{4}\frac{1}{x^2+1}\right]dx=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\bar{c}_1 arctgx+c_2$, где

$\bar{c}_1=\frac{c_1+1}{4}$.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Линейным ДУ $n-го$ порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)\ , \qquad (7)$$

где $p_i(x), f(x)$ заданные непрерывные функции на $[a,b]$. Если $f(x)\neq 0$, то (7) называется линейным неоднородным (ЛНУ), если же $f(x)\equiv 0$, то (7) называется линейным однородным уравнением (ЛОУ).

Система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется линейно независимой, если $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n\equiv 0$, только при всех $\alpha_i=0, (i=1,2,\ldots,n)$. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые частные решения ЛОУ, то $y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)$ – общее решение ЛОУ. Если все коэффициенты $p_i(x)(i=1,2,\ldots,n)$ постоянны, то общее решение ЛОУ находят с помощью характеристического уравнения

$$k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0\,. \qquad (8)$$

При этом могут представиться различные случаи:

I. Все корни характеристического уравнения (8) действительные и различные, тогда общее решение имеет вид

$$y_0=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx}\,. \qquad (9)$$

II. Все корни характеристического уравнения (9) различны, но среди них имеются комплексные $k_1=\alpha+i\beta$. Так как в (8) коэффициенты действительные, то, как известно из алгебры, корнем характеристического уравнения будет и сопряженное комплексное число $k_2=\alpha-i\beta$, поэтому используя формулы Эйлера паре комплексных сопряженных корней можно поставить в соответствие пару действительных частных решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

III. Среди корней характеристического уравнения (8) имеются кратные корни. Пусть k_1 есть вещественный m - кратный корень. Тогда ему соответствует m - линейно - независимых решений вида $e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, \dots, x^{m-1}e^{k_1 x}$.

IV. Если $k_1 = \alpha + i\beta$ есть комплексный корень кратности m, то ему и сопряжённому с ним корню $k_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности соответствуют $2m$ линейно-независимых решений: $e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\beta x$;
$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Примеры. Решить уравнения: **1)** $y'' - 5y' + 6y = 0$; **2)** $y''' - 8y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 4y = 0$ **4)** $y^{V} - 4y''' + 16y' = 0$.

1) Решение уравнения ищем в виде $y = e^{kx}$. Тогда характеристическое уравнение $k^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 2, k_2 = 3$. Поэтому общее решение ДУ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

2) Характеристическое уравнение $k^3 - 8 = 0$ или $(k-2)(k^2 + 2k + 4) = 0$, откуда $k_1 = 2,\ k_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}x$.Общее решение
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3e^{-x}\sin\sqrt{3}x$.

3) Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = 2$, частные решения $y = e^{2x},\ y_2 = xe^{2x}$. Общее решение имеет вид $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$.

4) Уравнение $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^5 + 8k^3 + 16k = 0$, корни которого $k_1 = 0, k_{2,3} = 2i, k_{4,5} = -2i$. Общее решение $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + c_4x\cos x + c_5x\sin 2x$.

Теорема. (о структуре общего решения ЛНУ).

Общее решение ЛНУ (7) представляет, сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ЛОУ.

Методы решения ЛНУ:

а) Наиболее распространенным способом нахождения частного решения ЛНУ является *метод вариации произвольных постоянных*.

Пример. Решим уравнение $y''' + y' = tgx$.

Общее решение соответствующего ЛОУ $y_0 = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Частное решение ищем в виде $y_ч = c_1(x) + c_2(x)\cos x + c_3(x)\sin x$. Совершенно аналогично рассуждая, как и в случае ЛНУ первого порядка для нахождения неизвестных функций $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ будем иметь следующую систему: $c_1' + c_2' \cos x + c_3' \sin x = 0$; $-c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$; $-c_2' \cos x - c_3' \sin x = tgx$. Отсюда общее решение ЛНУ имеет вид: $y = -\ln\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

б) Если правая часть уравнения (7) имеет специальный вид $f(x) = e^{ax}[P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx]$, (10) где $P_1(x), P_2(x)$ многочлены, то частное решение легче находить *методом неопределенных коэффициентов*.

Обозначим через m– наибольшая из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Если число $a + ib$ является корнем характеристического уравнения кратности μ, то частное решение ищут в виде

$y_ч = x^{\mu} e^{ax}[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx]$, (11), где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$– многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Они определяются подстановкой (11) в (7) сокращением на e^{ax} и приравниванием коэффициентов при $\cos bx$ и $\sin bx$, после чего остаётся приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левых и правых частях полученных двух равенств.

Пример. Решить уравнения **1)** $y'' - y' + 6y = 2xe^x$;

2) $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 2xe^x$; **3)** $y'' + y = \sin x$.

Решение. 1) Здесь правая часть имеет вид (10), причём $a = 1, b = 0$, $P_1(x) = 2x$. Решаем соответствующее однородное уравнение. Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 2, k_2 = 3$, так, что $a = 1$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $\mu = 0$ и частное решение следует искать в виде $y = (Ax + B)e^x$. Подставляя в данное уравнение, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степеням, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$y'_ч = Ae^x + (Ax + B)e^x, \quad y''_ч = 2Ae^x + (Ax + B)e^x,$$

$$2Ae^x + (Ax + B)e^x - 5Ae^x - 5(Ax + B)e^x + 6(Ax + B)e^x = 2xe^x$$

или $2Ax - 3A + 2B = 2x$; или $2A = 2$, $-3A + 2B = 0$, откуда

$A = 1, B = \dfrac{3}{2}$. Тогда $y_ч = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)e^x$; $y_{ону} = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \left(x + \dfrac{3}{2}\right)e^x$.

2) Здесь $a = 1, b = 0, P_1(x) = 2, m = 0$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 = 0$, т.е. $(k - 1)^4 = 0$, откуда $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, следовательно $\mu = 4$. Частное решение ищем в виде $y_ч = Ax^4e^x$. Тогда $y'_ч = 4Ax^3e^x + Ax^4e^x$,

$y''_ч = 12Ax^2e^x + 8Ax^3e^x + Ax^4e^x$, $y'''_ч = 24Axe^x + 36Ax^2e^x + 12Ax^3e^x + Ax^4e^x$,

$y^{IV}_ч = 24Ae^x + 96Axe^x + 72Ax^2e^x + 16Ax^3e^x + Ax^4e^x$.

Подставляя в исходное уравнение, получим $A = \dfrac{1}{12}$. Следовательно,

$$y_{ону} = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{1}{12}x^4\right)e^x.$$

3) Соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет характеристические числа $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, поэтому $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Здесь

$a=0, b=1,\ a+ib=i$, является простым корнем характеристического уравнения, потому $\mu=1$. Поэтому $y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$. Тогда

$$y_ч' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$y_ч'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим: $-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$, откуда $-2A=1, 2B=0$, $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$, $y_ч=-\frac{1}{2}x\cos x$,

$$y_{оңу} = -\frac{1}{2}x\cos x + c_1\cos x + c_2\sin x$$

§7. Система дифференциальных уравнений.

Для описания некоторых процессов или явлений нередко требуется несколько функций. Отыскание этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Система вида

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

называется нормальной системой ДУ. Аналогично дается определение решения системы (1) и её частного решения. Всякое уравнение $n-го$ порядка сводится к нормальной системе. Вообще говоря, возможно и обратное. Нормальная система n ДУ первого порядка, эквивалентна одному ДУ $n-го$ порядка, то отсюда следует, что одним из методов решения системы (1) является сведение её к уравнению порядка n.

Система линейных ДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + b_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Пример 1. Свести систему уравнений к уравнению 2-го порядка и найти её решение $\frac{dy}{dx} = y - z,\ \frac{dz}{dx} = -4y + z$.

Продифференцируем первое уравнение системы еще раз $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$, сложив оба уравнения будем иметь $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -3y$.

Подставив вместо $\frac{dz}{dx} = -3y - \frac{dy}{dx}$ в предыдущее уравнение, получим $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$. Ясно, что корнями характеристического уравнения являются $k_1 = -1,\ \ k_2 = 3$. Следовательно, $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ общее решение полученного уравнения. Чтобы найти z используем $z = y - \frac{dy}{dx} = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x}$.

Типовой расчёт по теме «Дифференциальные уравнения».

I. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. а) $(4x - 2xy^2)dx - (3y - 3x^2y)dy = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$;
2. а) $(6x + 2xy^2)dx - (6y + 3x^2y)dy = 0$; б) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$;
3. а) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$;
4. а) $(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}\,dx = 0$; б) $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$;
5. а) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$;
6. а) $\sqrt{3 + y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 10x^2y}{2y^2 + 5x^2}$;
7. а) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$;

8. а) $(3+e^x)yy' = e^x$; б) $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$;

9. а) $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$; б) $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

10. а) $x(1+y^2)dx + 2y\cdot e^x dy = 0$; б) $xy' = \dfrac{3y^3+8x^2y}{2y^2+4x^2}$;

11. а) $y' = 10^{x+y}$; б) $y' = \dfrac{xy+x^2-y^2}{x^2-2xy}$;

12. а) $y' = \dfrac{3x^2+1}{y+5}$; б) $y' = \dfrac{2x^2+5y^2-xy}{x^2+2y^2}$;

13. а) $\sqrt{7+y^2}\,dx + 4(x^2y+y)dy = 0$; б) $y' = \dfrac{y^2+8xy+4x^2}{x^2}$;

14. а) $(e^{3x}+1)dy + ye^{3x}dx = 0$; б) $y' = \dfrac{y^2+4xy+2x^2}{x^2}$;

15. а) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$; б) $y' = \dfrac{y^2+6xy+6x^2}{x^2}$;

16. а) $xy' + y = x^2$; б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$;

17. а) $(x+1)e^y dx + e^{2y}x^2 dy = 0$; б) $2y' = \dfrac{y^2+8xy+8x^2}{x^2}$;

18. а) $(x^2y+y)dx + (y^2x+x)dy = 0$; б) $y' = \dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2x+7x^3}$;

19. а) $5\sin x(y+1)dx + y^2\cos^3 x dy = 0$; б) $y' = \dfrac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$;

20. а) $(3+2^x)y'y = 2^x$; б) $y' = \dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$;

21. а) $\sin x(1+y^2)dx + y\dfrac{1}{\cos x}dy = 0$; б) $y' = \dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$;

22. а) $(3^x+9)dy - y3^x dx = 0$; б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$;

23. а) $(5+e^x)y' = ye^x$; б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$;

24. а) $(e^{3x}+7)dy = ye^{3x}dx$; б) $y' = \dfrac{x^2+3xy-y^2}{x^2+y^2}$;

25. а) $\sin x\,tgy\,dx+\left(1+\cos^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2 y}dy=0$; б) $y'=\dfrac{x^2+3xy}{y^2+2xy}$;

II. Найти решение задачи Коши.

1. а) $y'-yctgx=2x\sin x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; б) $y^2dx+\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)dy=0,\ y(e)=2$;

2. а) $y'+ytgx=\cos^2 x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$; б) $(y^4e^y+2x)y'=y,\ \ y(0)=1$;

3. а) $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x,\ y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$; б) $y^2dx+(xy-1)dy=0,\ y(1)=0$;

4. а) $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2},\ y(0)=\dfrac{2}{3}$; б) $2\left(4y^2+4y-x\right)y'=1,\ y(0)=0$;

5. а) $y'+\dfrac{y}{4}=\dfrac{x+1}{x}e^x,\ y(1)=e$; б) $\left(x\cos^2 y-y^2\right)y'=y\cos^2 y,\ y(\pi)=\dfrac{\pi}{4}$;

6. а) $y'+\dfrac{y}{x}=3x,\ y(1)=1$; б) $dx+\left(xy-y^3\right)dy=0,\ y(-1)=0$;

7. а) $y'+2xy=-2x^3,\ y(1)=e^{-1}$; б) $8\left(4^3y+xy-y\right)y'=1,\ y(0)=0$;

8. а) $y'+xy=-x^3,\ y(0)=3$; б) $2\left(x+y^4\right)y'=y,\ y(-2)=-1$;

9. а) $y'-\dfrac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2,\ y(0)=1$; б) $\left(y^2+2y-x\right)y'=1,\ y(2)=0$;

10. а) $y'+\dfrac{xy}{2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{x}{2},\quad y(0)=\dfrac{2}{3}$; б) $2y^2dx+\left(x+e^{\frac{1}{y}}\right)dy=0,\quad y(e)=1$;

11. а) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3},\quad y(1)=1$; б) $2y\sqrt{y}dx-\left(6x\sqrt{y}+7\right)dy=0,\quad y(-4)=1$

12. а) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\quad y(0)=\dfrac{1}{2}$; б) $y^2\left(y^2+4\right)dx+2xy\left(y^2+4\right)dy=2dy,$
$y(\pi/8)=2;$

13. а) $y'-\dfrac{2x-5}{x^2}y=5,\quad y(2)=4$; б) $\left(xy+\sqrt{y}\right)dy+y^2dx=0,\quad y(-1/2)=4$;

14. а) $y'-y\cos x=\sin 2x,$ б) $y^3(y-1)dx+\left(3xy^3-3xy^2-y-2\right)dy=0$
$y(1/4)=2;$

$y(0) = -1$;

15. а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$; б) $(13y^3 - x)y' = 4y, \quad y(5) = 1$;

16. а) $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$; б) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$;

17. а) $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3$; б) $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$;

18. а) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 0$;

19. а) $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$; б) $xy - y = y^2, \quad y(0) = 0$;

20. а) $y' + ytgx = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; б) $xy' + y = xy^2, \quad y(0) = 0$;

21. а) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1$; б) $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{2y}, \quad y(1) = 2$;

22. а) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$; б) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$;

23. а) $(1-x)(y' + y) = e^{-x}, \quad y(2) = 0$; б) $y' - 2xy = 2x^2 y^3, \quad y(0) = 1$;

24. а) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(1) = 2$; б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad y(1) = 0$;

25. а) $y' - yctgx = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; б) $y' - \frac{3y}{x} = -x^3 y^2, \quad y(1) = 1$;

III. Решить уравнения

1. а) $(y')^2 - 2xy' + x^2 = 0$; б) $y = 2xy' + (y')^2$;

2. а) $(y')^2 - 4y^2 = 0$; б) $y = x(y')^2 + (y')^2$;

3. а) $(y')^2 - 8y' + 15 = 0$; б) $y = x(1 + y') + (y')^2$;

4. а) $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$; б) $y = y(y')^2 + 2xy'$;

5. а) $y' + e^{y'} = x$; б) $y = xy' + (y')^2 + y'$;

6. а) $x = (y')^3 + 1$; б) $y = xy' + \sqrt{1-(y')^2}$;

7. а) $y = (y')^2 e^{y'}$; б) $y = xy' + y'$;

8. а) $x(y')^3 = 1 + y'$; б) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$;

9. а) $y = (y')^2 + xy' - x$; б) $y = xy' - \dfrac{1}{(y')^2}$;

10. а) $x = (y')^2 + \dfrac{y}{y'}$; б) $y = x\left(\dfrac{1}{x} + y'\right) + (y')^2$;

11. а) $y = (y')^2 + 4(y')^3$; б) $2y(y'+1) = x(y')^2$;

12. а) $y = (y'-1)e^{y'}$; б) $y = x(y')^2 + 2y'$;

13. а) $x = (y')^3 - y' + 2$; б) $y = xy' + \arcsin y'$;

14. а) $x = 2y' - \ln y'$; б) $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$;

15. а) $y = y'\sqrt{1+(y')^2}$; б) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln y'}{x}$;

16. а) $x = y'\cos y'$; б) $y' = \ln(xy' - y)$;

17. а) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$; б) $x = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{y'}} - \dfrac{1}{y'}\right)$;

18. а) $x = y'\sin y'$; б) $y = (y')^2(1-x)$;

19. а) $(y')^2 - 7(x+y)y' + 12xy = 0$; б) $y = x(y')^3 + (y')^4$;

20. а) $(y')^2 - 9y' + 20 = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x,\ y(0) = 1,$ $y'(0) = -2$

21. а) $x = (y')^3 - 3y' + 2$; б) $y = xy' + \cos y'$;

22. а) $x = (y')^2 - 2y' + 1$; б) $y = \dfrac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$;

23. а) $y = 3(y')^2 + 2(y')^3$; б) $y = x\dfrac{1+(y')^2}{2y'}$;

24. а) $(y')^2-(\sin x+y)y'+y\sin x=0$ б) $y=4yy'+x((y')^2+16)$;

25. а) $(y')^2-(y+\cos x)y'+y\cos x=0$ б) $y=xy'+\sin y'$;

IV. Найти общее решение и частное решение удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. а) $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x)$ б) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x$;
2. а) $y''+7y'-8y=x+1,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=3$ б) $y''-7y'=(x+1)e^{6x}$;
3. а) $y''-7y'+12y=x^2+1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y''+3y'-4y=(x+2)e^{3x}$;
4. а) $4y''-y=x^3-24x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=2$ б) $y''+y'-2y=(x+3)e^{-2x}$;
5. а) $y''-y'=2(1-x),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y''+4y'=(x+3)e^{-4x}$;
6. а) $y''+5y'=x^2+1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y''+3y'-4y=(x^2+5)e^x$;
7. а) $y''+3y'-4y=x+1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$ б) $y''-8y'+15y=(x+5)e^{3x}$;
8. а) $y''-4y'+3y=x^2+2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y''+2y'-3y=(x+5)e^{-3x}$;
9. а) $y''+4y'-5y=x+3,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y'''+y''-2y'=(6x+5)e^x$;
10. а) $y''-y'=x+1,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=5$; б) $y'''+4y''+4y'=(9x+15)e^x$;
11. а) $y''-5y'-6y=x^2+2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$ б) $y'''-3y''-y'+3y=(4-8x)e^x$;
12. а) $y''+2y'-3y=2x+1,\quad y(1)=2,\quad y'(1)=3$ б) $y'''+3y''+2y'=(1-2x)e^{-x}$
13. а) $y''-7y'+6y=xe^x$, $\boldsymbol{y(0)=1,}$ $y'(0)=0$; б) $y'''-4y''+3y'=-4xe^{2x}$;
14. а) $y''+2y'-3y=3xe^x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$ б) $y'''-6y''+9y'=4xe^x$;
15. а) $y''-4y=x^2+3,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$ б) $y'''+6y''+9y'=(16x+24)e^x$;
16. а) $y''+4y'+4y=xe^{2x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$ б) $y''+5y'=x\sin x$;
17. а) $y''+y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$; б) $y''+3y'=(x^2+1)e^{-3x}$;
18. а) $y''+4y=x+3,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=3$; б) $y'''-8y'+12y=(x+3)e^{2x}$;
19. а) $y''-4y'+4y=\sin x,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$ б) $y'''+9y=xe^{3x}$;

20. а) $y'' + 9y = x^2 + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ б) $y'' - 9y' + 8y = (x+1)e^x$;

21. а) $y'' + 8y' = x + 5, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 3$ б) $y'' + 4y = \sin 2x$;

22. а) $y'' + y' = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$; б) $y''' - 5y'' = (x+1)e^{5x}$;

23. а) $y'' + 11y' - 12y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ б) $y'' + y = x\sin 2x$;

24. а) $y'' + 4y' - 5y = x^2 + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ б) $y'' + 9y' - 10y = (x+3)e^x$;

25. а) $y'' + y' - 2y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$; б) $y'' + y = x\cos 2x$;

V. Найти общее решение системы уравнений.

1. $\begin{cases} y' = -y + 3z, \\ z' = 2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4y' - z' = -3y' + \sin x, \\ y' + z = \cos x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' = z, \\ z'' = y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' = z - y. \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = -4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y' = -2y - z + \sin x, \\ z' = 4y + 2z - \cos x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' = z - \cos x, \\ z' = -y + \sin x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' = 4y - z - 5x + 1, \\ z' = y + 2z + x - 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y - z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = -y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y' = -2y + 4z, \\ z' = -y + 3z + 3x^2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y' = -3x - y, \\ z' = y - z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y' = -4z + \cos 2x, \\ z' = -4y + \sin 2x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x, \\ z' = -y - 2z + \sin x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y' = 5y + 4z + e^x, \\ z' = 4y + 5z + 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y' = y + 5z + x, \\ z' = -y - 3z + 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y' = -7y + 5z, \\ z' = 4y - 8z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 3y + 6z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y' = y - z + x, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y' = 4y - z, \\ z' = y + 2y - 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = 3y - 4z. \end{cases}$

Литература

1. Назаров А.И. Курс математика для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.-576 с.
2. Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.-240 с.
3. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Письменный Д.Т., М, Айрис Пресс, 2006.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1.2. М., Интеграл-Пресс, 2005.

Методические указания

и задания для типового расчёта

по теме:

«Дифференциальные уравнения»

Алиева Х.Р., Шамов Э.Ш.

Компьютерная верстка Гаджиев Г.К.
Подписано в печать. Формат 60*84/16
Гарнитура Times. Печать оперативная. Бумага потребительская.
Усл.печ.л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии Махачкалинского филиала МАДИ
367026, Махачкала, пр. Шамиля, 1