МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**МАХАЧКАЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКОГО АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНОГО ИНСТИТУТА
(ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА)**

Кафедра Математики и Информатики

Курбанов К.О., Умалатов С.Д.

Интегральное исчисление функции одной переменной
(учебное пособие)

Махачкала 2012

Интегральное исчисление функции одной переменной (учебное пособие), Махачкала, МФ МАДИ (ГТУ), 2012., 46стр

Учебное пособие предназначено для студентов первых курсов.

Оно поможет студентам при их самостоятельной работе и выполнении домашних заданий. Для этого в пособии имеется необходимая теория с большим количеством решенных примеров, а также типовые расчетные задания по каждой теме. В конце пособия приводится пример выполнения и оформления типового варианта контрольной работы.

Рекомендуется для студентов первых курсов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

СОСТАВИТЕЛИ: к. ф-м. н., проф., зав. каф. Курбанов К.О.;
к. ф-м. н., доц. Умалатов С.Д.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: д.т.н., проф. Баламирзоев А.Г.
к.ф-м.н., доц. Абдусаламов Х.А.

Печатается согласно постановления Ученого совета
Махачкалинского филиала МФ МАДИ (ГТУ) от 27 октября 2012г.

Содержание

Неопределённый интеграл

Определение и свойства неопределённого интеграла

Теория

Основной задачей дифференциального исчисления являлось нахождение по заданной функции её производной $f'(x)$.В интегральном исчислении основной задачей является обратная задача, которая заключается в нахождении функции $f(x)$ по её известной производной $f'(x)$.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b),если $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого интервала и её производная $F'(x)$ равна $f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b),то и функция Ф(x)= $F(x)$+С,где С-произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$ на интервале (a,b).

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$,определённых на интервале (a,b), называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где С-произвольная постоянная.

Основные свойства неопределённого интеграла:

I. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

II. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

III. $\int dF(x) = F(x) + C$

IV. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где k-константа

V. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов (в данной таблице u=u(x)).

$1^0.\int du = u + c$

2^0. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$; в частности, $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

3^0. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4^0. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

5^0. $\int e^u du = e^u + C$

6^0 . $\int \sin u du = -\cos u + C$

7^0. $\int \cos u du = \sin u + C$

8^0. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

9^0. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

10^0. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

11^0. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\arccos \frac{u}{a} + C$

12^0. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$

13^0.. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C$

14^0. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

15^0. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

При интегрировании часто бывают полезными следующие свойства дифференциала функции:

1) $dx = d(x \pm a)$, где а-любое число;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$;

3) $x^a dx = \frac{1}{a+1} d(x^{a+1}), a \neq -1$;

4) $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$

Вычисление неопределённого интеграла с использованием основных свойств и таблицы интегралов называется непосредственным интегрированием.

Примеры

Пример 1.1. Найти интеграл $\int\left(5x^4-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x^5}-3\right)dx$

Решение. Данный интеграл является интегралом от степенной функции. Чтобы привести его к «табличному» виду, используем следующие равенства:

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m},\ x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

$$\int\left(5x^4-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x^5}-3\right)dx=\int 5x^4dx-\int 2x^{\frac{2}{3}}dx+\int 4x^{-5}dx-\int 3dx=5\int x^4dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+4\int x^{-5}dx-3\int dx=$$

$$=5\frac{x^5}{5}-2\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+4\frac{x^{-4}}{-4}-3x+C=x^5-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^4}-3x+C.$$

Пример 1.2. Найти интеграл $\int\left(4x^2-1\right)^3dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию по формуле:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

$$\int\left(4x^2-1\right)^3dx=\int\left(64x^6-48x^4+12x^2-1\right)dx=64\int x^6dx-48\int x^4dx+12\int x^2dx-\int dx=$$

$$=\frac{64}{7}x^7-\frac{48}{5}x^5+4x^3-x+C$$

Пример 1.3. Найти интеграл $\int\frac{(2+x)\left(x^2-3\right)}{x^2}dx.$

Решение. В числителе подынтегральной функции раскроем скобки, затем почленно разделим числитель на знаменатель и сократим полученные дроби:

$$\int\frac{(2+x)\left(x^2-3\right)}{x^2}dx=\int\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2}dx=\int\left(x+2-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}\right)dx=\int xdx+2\int dx-3\int\frac{dx}{x}-6\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2x-3\ln|x|+\frac{6}{x}+C.$$

Пример 1.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x-3}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x-3}=\int\frac{d(x-3)}{x-3}=\ln|x-3|+C.$

Пример 1.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(2x+5)^2}$.

Решение. Применим свойство степени: $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

$$\int \frac{dx}{(2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-2}\, d(2x) = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-2}\, d(2x+5) = -\frac{1}{2(2x+5)} + C.$$

Пример 1.6. Найти интеграл $\int \sin 4x dx$.

Решение. $\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}\int \sin 4x d(4x) = -\frac{1}{4}\cos 4x + C.$

Пример 1.7. Найти интеграл $\int e^{-3x} dx.$

Решение. $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$

Пример 1.8. Найти интеграл $\int \frac{2x-3}{3x+1} dx.$

Решение. В числителе получим выражение, стоящее в знаменателе, а затем разделим числитель на знаменатель:

$$\int \frac{2x-3}{3x+1} dx = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}(2x-3)}{3x+1} dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x-\frac{9}{2}}{3x+1} dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x+1-1-\frac{9}{2}}{3x+1} dx = \frac{2}{3}\int \frac{(3x+1)-\frac{11}{2}}{3x+1} dx = \frac{2}{3}\int \left(1-\frac{\frac{11}{2}}{3x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int dx - \frac{11}{3}\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{2}{3}x - \frac{11}{9}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{2}{3}x - \frac{11}{9}\ln|3x+1| + C.$$

Пример 1.9. Найти интеграл $\int \frac{2x^2-3x+1}{x+1} dx.$

Решение. Разделим многочлен $2x^2-3x+1$ на многочлен $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2+2x} & 2x-5 \\ -5x+1 & \\ \underline{-5x-5} & \\ 6 & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}=2x-5+\dfrac{6}{x+1}$, следовательно,

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx=\int\left(2x-5+\frac{6}{x+1}\right)dx=2\int xdx-5\int dx+6\int\frac{dx}{x+1}=x^2-5x+6\int\frac{d(x+1)}{x+1}=$$
$$x^2-5x+6\ln|x+1|+C$$

Пример 1.10. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x+8}dx.$

Решение. Выделим в знаменателе дроби полный квадрат:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\int\frac{dx}{x^2-4x+4+4}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\int\frac{d(x-2)}{2^2+(x-2)^2}=\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-2}{2}+C.$$

Пример 1.11. Найти интеграл $\int\cos^2 3xdx.$

Решение. Применим формулу понижения степени: $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int\cos^2 3xdx=\int\frac{1+\cos 6x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\int\cos 6xd(6x)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C.$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Найти интеграл.

1.1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+7x+11}$

1.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$

1.3. $\int e^{6x-1}dx$

1.4. $\int\sin 5xdx$

1.5. $\displaystyle\int\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.6. $\displaystyle\int\frac{5\sqrt{tg^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$

1.7. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$

1.8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+25}$

1.9. $\displaystyle\int\frac{dx}{9x^2+16}$

1.10. $\displaystyle\int\frac{\ln^2(x-8)}{x-8}dx$

1.11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

1.12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$

1.13. $\int\cos(3-4x)dx$

1.14. $\int\sin(3x+6)dx$

1.15. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+7}$

1.16. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+7x}$

1.17. $\displaystyle\int\frac{3x+2}{2x-1}dx$

1.18. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x+1}dx$

1.19. $\int e^{-5x}dx$

1.20. $\int (1+4x)^5 dx$

1.21. $\int \frac{(2x+1)(1-x^3)}{x^2}dx$

1.22. $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$

1.23. $\int (\sqrt{x}+1)^2 dx$

1.24. $\int \cos 3x dx$

1.25. $\int \left(8x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4} - 7\right)dx$

1.26. $\int \frac{dx}{x+4}$

Замена переменной в неопределённом интеграле (метод подстановки)

Теория

Наиболее общим приёмом интегрирования функций является метод подстановки, который применяется тогда, когда искомый интеграл не является табличным, но путём ряда элементарных преобразований он может быть сведен к табличному. Метод подстановки основан на применении следующей формулы: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$

где $x=\varphi(t)$ -дифференцируемая функция от t ,имеющая обратную функцию $t=\varphi(x)$.

Сущность применения этой формулы состоит в том, что в данном интеграле переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, и следовательно, dx произведением $\varphi'(t)dt$.После вычисления полученного интеграла необходимо сделать обратную замену $t=\varphi(x)$.

Подстановка, упрощающая данный интеграл, обычно подбирается по виду подынтегральной функции.

Примеры

Пример 2.1. Найти интеграл. $\int x\sqrt{x+1}dx$.

Решение.

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x+1}=t, x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int (t^2-1)t2tdt = 2\int (t^4-t^2)dt = 2\left(\int t^4dt - \int t^2dt\right) = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= 2\left(\frac{(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt{x+1})^3}{3}\right) + C = 2(\sqrt{x+1})^3\left(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{3}\right)+C = \frac{2}{15}(3x-2)(\sqrt{x+1})^3 + C =$$

$$= \frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C.$$

Пример 2.2. Найти интеграл $\int(2x-5)^3dx.$

Решение. $\int(2x-5)^3dx = \left|\begin{matrix} 2x-5=t, x=\dfrac{t+5}{2} \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{matrix}\right| = \int t^3\dfrac{1}{2}dt = \dfrac{t^4}{8}+C = \dfrac{(2x-5)^4}{8}+C.$

Пример 2.3. Найти интеграл $\int\sin(2-3x)dx$

Решение. $\int\sin(2-3x)dx = \left|\begin{matrix} 2-3x=t, x=\dfrac{2-t}{3} \\ dx=-\dfrac{dt}{3} \end{matrix}\right| = -\dfrac{1}{3}\int\sin t dt = \dfrac{1}{3}\cos t + C = \dfrac{1}{3}\cos(2-3x)+C.$

Пример 2.4. Найти интеграл $\int\dfrac{e^{4x}dx}{e^x-1}.$

Решение. $\int\dfrac{e^{4x}dx}{e^x-1} = \left|\begin{matrix} e^x-1=t \\ e^xdx=dt, dx=\dfrac{dt}{t+1} \end{matrix}\right| = \int\dfrac{(t+1)^4dt}{t(t+1)} = \int\dfrac{(t+1)^3dt}{t} = \int\left(t^2+3t+3+\dfrac{1}{t}\right)dt =$

$= \dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+3t+\ln|t|+C = \dfrac{(e^x-1)^3}{3}+\dfrac{3(e^x-1)^2}{2}+3(e^x-1)+\ln|e^x-1|+C.$

Пример 2.5. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x-7}}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x-7}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x-7}=t, x=t^2+7 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right| = \int\frac{2tdt}{(t^2+7)t} = 2\int\frac{dt}{t^2+7} = \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{t}{\sqrt{7}}+C = \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{7}}+C$$

Пример 2.6. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \left|\begin{matrix} x=3tgt \\ dx=3\dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right| = \int\frac{3dt}{9tg^2t\sqrt{9tg^2t+9}\cos^2 t} = \frac{1}{9}\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9}\int\sin^{-2}td(\sin t) = -\frac{1}{9}\sin^{-1}t+C$$

$$= \left|t=arctg\frac{x}{3}\right| = -\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(arctg\frac{x}{3}\right)+C = -\frac{1}{9}\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\left(arctg\dfrac{x}{3}\right)}}+C = -\frac{1}{9}\sqrt{1+\frac{1}{\dfrac{x^2}{9}}}+C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+C$$

Пример 2.7. Найти интеграл $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx = \begin{vmatrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \end{vmatrix} = \int \frac{8\sin^3 t 2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = 8\int \sin^3 t dt = 8\int \sin^2 t \sin t dt = -8\int \left(1-\cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= -8\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C = -8\left[\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right] + C$$

Пример 2.8. Найти интеграл

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x}} = \begin{vmatrix} x = t^4, dx = 4t^3 dt \\ \sqrt{x} = t^2, \sqrt[4]{x} = t \end{vmatrix} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 - 7t} = 4\int \frac{t^2 dt}{t-7} = 4\int \frac{\left(t^2 - 49\right) + 49}{t-7} dt =$

$$= 4\int \frac{(t-7)(t+7) + 49}{t-7} = 2t^2 + 28t + 196\ln|t-7| + C = 2\sqrt{x} + 28\sqrt[4]{x} + 196\ln\left|\sqrt[4]{x} - 7\right| + C$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 2. Найти интеграл.

2.1. $\int \sqrt{144 - x^2}\, dx$

2.2. $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

2.3. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}dx}{x^2}$

2.4. $\int \frac{xdx}{x-1}$

2.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

2.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

2.7. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$

2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$

2.9. $\int (3x-1)^2 dx$

2.10. $\int (2-9x)^4 dx$

2.11. $\int \cos(5-7x)dx$

2.12. $\int (8x-3)^3 dx$

2.13. $\int \sin(3x+2)dx$

2.14. $\int \cos(6x+11)dx$

2.15. $\int e^{2x+5} dx$

2.16. $\int e^{4x^2+1} xdx$

2.17. $\int \frac{dx}{6-7x}$

2.18. $\int \frac{dx}{5x+3}$

2.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-9}}$

2.20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-8x)^2}}$

2.21. $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$

2.22. $\int \frac{dx}{\cos^2(6x+1)}$

2.23. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x-9)}$

2.24. $\int \cos(7x-3)dx$

2.25. $\int \sin(8+5x)dx$

2.26. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

Интегрирование по частям

Теория

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и в этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нём существует и интеграл $\int udv$, причём

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла, $\int vdu$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1.Интегралы вида $\int P(x)\sin axdx, \int P(x)\cos axdx, \int P(x)e^{ax}dx,$ где $P(x)$ - многочлен, a - некоторое число. Для их вычисления следует положить, $u = P(x),$ а $dv = \sin axdx, dv = \cos axdx, dv = e^{ax}dx,$ соответственно.

2.Для вычисления интегралов вида $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx,$ $\int P(x)arcctgxdx, \int P(x)\ln xdx,$ где $P(x)$ - многочлен, следует положить u равным одной из указанных выше функций, а $dv = P(x)dx.$

3.Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx, \int e^{ax}\cos bxdx,$ где a и b некоторые числа, вычисляется двукратным интегрированием по частям, причём u полагают либо равным $\sin bx$, $\cos bx$, соответственно, а $dv = e^{ax}dx,$ либо наоборот.

Примеры

Пример 3.1. Найти интеграл $\int x\cos 3xdx$.

Решение.

$$\int x\cos 3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos 3xdx, v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

Пример 3.2. Найти интеграл $\int (x+3)e^{-x}dx.$

Решение.

$$\int (x+3)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x+3, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{vmatrix} = -(x+3)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+3)e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример 3.3. Найти интеграл $\int (x^2-7)\sin xdx.$

Решение.

$$\int (x^2-7)\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x^2-7, du = 2xdx \\ dv = \sin xdx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -(x^2-7)\cos x + \int 2x\cos xdx = -(x^2-7)\cos x + 2\int x\cos xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos xdx, v = \sin x \end{vmatrix} = -(x^2-7)\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin xdx = -(x^2-7)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Пример 3.4. Найти интеграл $\int \arcsin 2xdx.$

Решение. $\int \arcsin 2xdx = \begin{vmatrix} u = \arcsin 2x, du = \dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\arcsin 2x - 2\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$

$$= x\arcsin 2x - 2\left(-\frac{1}{8}\right)\int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = x\arcsin 2x + \frac{1}{4}2\sqrt{1-4x^2} + C = x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Пример 3.5. Найти интеграл $\int \ln^2 xdx.$

Решение. $\int \ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, du = 2\ln x\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int \dfrac{x\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx =$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

Пример 3.6. Найти интеграл $\int e^{2x}\cos xdx.$

Решение.

$$\int e^{2x}\cos xdx = \begin{vmatrix} u = \cos x, du = -\sin xdx \\ dv = e^{2x}dx, v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin xdx = \begin{vmatrix} u = \sin x, du = \cos xdx \\ dv = e^{2x}dx, v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos xdx.$$

Перенесём последний интеграл в левую часть равенства:

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\cos xdx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x + C.$$

Теперь разделив обе части равенства на $\frac{5}{4}$, получаем:

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + C.$$

Пример 3.7. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2+b}dx$

Решение. Имеем

$$\int \sqrt{x^2+b}dx = \int \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+b}}dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+b}} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+b}}$, применим метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+b}} = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+b}}, v = \sqrt{x^2+b} \end{array} \right| = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}dx.$$

Подставляя последнее выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int \sqrt{x^2+b}dx = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}dx + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}, \text{или}$$

$$2\int \sqrt{x^2+b}dx = x\sqrt{x^2+b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}.$$

Откуда $\int \sqrt{x^2+b}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+b} + b\ln\left| x + \sqrt{x^2+b} \right| \right) + C$.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 3. Найти интеграл.

3.1. $\int (x+1)e^{2x}dx.$	3.2. $\int (x-1)e^{x}dx.$
3.3. $\int arctg\, 4xdx.$	3.4. $\int \arcsin 5xdx.$
3.5. $\int \arccos xdx.$	3.6. $\int xe^{x+3}dx.$
3.7. $\int (x+1)e^{-x}dx.$	3.8. $\int xe^{x+2}dx.$
3.9. $\int (x+1)e^{-4x}dx.$	3.10. $\int arctg\, 3xdx.$
3.11. $\int \ln(x-5)dx.$	3.12. $\int x^2 e^{-2x}dx.$
3.13. $\int (x+1)\cos 7xdx.$	3.14. $\int arctg\, 2xdx.$
3.15. $\int (x-7)\cos 2xdx.$	3.16. $\int (x+2)\cos 3xdx.$

3.17. $\int (x+4)\sin 3x dx.$

3.18. $\int (x-4)\cos 2x dx.$

3.19. $\int (x+4)\sin 2x dx.$

3.20. $\int (x+5)\sin x dx.$

3.21. $\int (x-4)\sin 2x dx.$

3.22. $\int (x+4)\cos 3x dx.$

3.23. $\int (x+6)\cos 4x dx.$

3.24. $\int (x+9)\sin x dx.$

3.25. $\int xe^{-4x} dx.$

3.26. $\int xe^{-5x} dx.$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Теория

Всякую правильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}(n<m)$ с действительными коэффициентами, знаменатель которой $Q_m(x)$ имеет вид $Q_m(x)=(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^r$, можно разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+pq+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+pq+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{\left(x^2+pq+q\right)^r},$$ где

$A_1, A_2,\ldots, A_k, M_1, M_2,\ldots, M_r, N_1, N_2,\ldots, N_r$ - некоторые постоянные действительные числа. Для нахождения этих неизвестных постоянных правую часть равенства приводят к общему знаменателю, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей. Таким образом, получают систему линейных уравнений, из которой находятся искомые постоянные. Этот метод нахождения неизвестных называется методом неопределённых коэффициентов.

Итак, для нахождения неопределённого интеграла от дробно-рациональной функции следует поступать следующим образом:

1. Если рациональная дробь неправильная, то делением числителя на знаменатель выделяется целая часть, т.е. данная функция представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;
2. Затем знаменатель полученной правильной дроби разлагается на произведение линейных и квадратичных множителей;
3. Эта правильная дробь разлагается на сумму простейших дробей, которые интегрируются следующим образом:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1.$

III. $\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx.$ Выделив полный квадрат в знаменателе и сделав соответствующую замену переменной, этот интеграл можно свести к интегралам вида:

$$\int \frac{tdt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C,$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a} + C.$$

IV. $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}dx, n = 1,2,...$ Производя действия, аналогичные предыдущему случаю, приходим к интегралу вида

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Интегрированием по частям можно снизить степень знаменателя и в последнем интеграле. Таким образом, последовательно выполняя эти шаги, можно прийти к интегралу

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a} + C.$$

Примеры

Пример 4.1. Найти интеграл $\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx.$

Решение.

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx = \int \frac{2-x}{(x^2+4x+4)+2}dx = \int \frac{2-x}{(x+2)^2+2}dx = \begin{vmatrix} x+2=t, dx=dt \\ x=t-2 \end{vmatrix} = \int \frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt =$$

$$= \int \frac{2-t+2}{t^2+2}dt = \int \frac{4-t}{t^2+2}dt = 4\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+2} = \frac{4}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C =$$

$$= 2\sqrt{2} arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + C.$$

Пример 4.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx.$

Решение. $\int \frac{x+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx = \int \frac{x+1}{\left(x^2-4x+4+1\right)^2}dx = \int \frac{x+1}{\left[(x-2)^2+1\right]^2}dx = \left| \begin{matrix} x-2=t, dx=dt \\ x=t+2 \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} + 3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} + 3\int \frac{\left(t^2+1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} + 3\int \frac{dt}{t^2+1} -$$

$$-3\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{matrix} u=t, du=dt \\ dv=\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}, v=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} + 3arctgt + \frac{3t}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} +$$

$$+3arctgt + \frac{3t}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{3}{2}arctgt + C = \frac{3t-1}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{3}{2}arctgt + C = \frac{3x-7}{2\left(x^2-4x+5\right)} + \frac{3}{2}arctg(x-2) + C.$$

Пример 4.3. Найти интеграл $J(x) = \int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx.$

Решение. В данном случае подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4+8x^3-3x-3 & x^3+2x^2+x \\ \cline{2-2} \underline{4x^4+8x^3+4x^2} & 4x \\ -4x^2-3x-3 & \end{array}$$

$$\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x} = 4x - \frac{4x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x}$$

$$J = \int 4xdx - \int \frac{4x^2+3x+3}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx = 2x^2 - J_1.$$

Разложим правильную дробь $\frac{4x^2+3x+3}{x\left(x^2+2x+1\right)}$ на сумму простейших дробей. Имеем

$$\frac{4x^2+3x+3}{x\left(x^2+2x+1\right)}=\frac{4x^2+3x+3}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$4x^2+3x+3=A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+Cx$$

или $4x^2+3x+3=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$.

Теперь приравняем коэффициенты перед одинаковыми степенями неизвестной в правой и в левой частях последнего равенства, и найдём из полученной системы коэффициенты A,B,C.

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=4 \\ x^1 & 2A+B+C=3 \\ x^0 & A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow A=3,\ \ B=1,\ \ C=-4$$

$$J_1=\int\frac{3dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}-4\int\frac{dx}{(x+1)^2}=3\ln|x|+\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}.$$

$$J=2x^2-3\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C.$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 4. Найти интеграл.

4.1. $\int\frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx$

4.2. $\int\frac{x+2}{x^3+x^2}dx.$

4.3. $\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx.$

4.4. $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx.$

4.5. $\int\frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx.$

4.6. $\int\frac{x^3-x+2}{x^2-1}dx.$

4.7. $\int\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x}dx.$

4.8. $\int\frac{x^4+1}{x^3-x}dx.$

4.9. $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}.$

4.10. $\int\frac{x+2}{(x+3)^2}dx.$

4.11. $\int\frac{3x^2-2x-4}{(x-1)\left(x^2-4\right)}dx.$

4.12. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

4.13. $\int\frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}dx.$

4.14. $\int\frac{3x^3+2}{x(x+1)^2}dx.$

4.15. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx.$

4.16. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$

4.17. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx.$

4.18. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx.$

4.19. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx.$

4.20. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx.$

4.21. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx.$

4.22. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-1)(x-1)}dx.$

4.23. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx.$

4.24. $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx.$

4.25. $\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x^2+x}dx.$

4.26. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$

Интегрирование тригонометрических выражений

Теория

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводятся универсальной подстановкой $t = tg\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi,$ к интегралу от рациональной функции. При этом

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В частности, если $R(-\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$, то подстановкой $\sin x = t$ или $\cos x = t.$

2. При нахождении интегралов вида $\int f(\cos x)\sin xdx$ и $\int f(\sin x)\cos xdx$ целесообразно применить подстановки $\cos x = t$ и $\sin x = t$ соответственно.

В частности для интегралов вида $\int \cos^m x \sin^n xdx,\ (m, n \in Z)$ возможны следующие случаи:

1)одно из чисел m или n-нечётное, например $m = 2k+1.$ Тогда

$\int \cos^m x\sin^n xdx = \int \cos^{2k} x\sin^n x\cos xdx = \int (1-\sin^2 x)^k \sin^n xd(\sin x),$ т.е. получим интегралы от степенных функций:

2)оба числа m и n-чётные. Тогда применяют формулы, позволяющие понизить степень тригонометрических функций:

$$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha, 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha.$$

3)интегралы $\int \sin\alpha x\cos\beta xdx, \int \sin\alpha x\sin\beta xdx, \int \cos\alpha x\cos\beta xdx$ вычисляются, если их подынтегральные выражения преобразовать по формулам:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right];$$

Примеры

Пример 5.1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\,\frac{x}{2}=t,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{\frac{3+3t^2+5-5t^2}{1+t^2}(1+t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2(4-t^2)}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\,\frac{x}{2}}{2-tg\,\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Пример 5.2. Найти интеграл $\int\cos^3 x\sin^{10}xdx$.

Решение.

$$\int\cos^3 x\sin^{10}xdx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{10}x\cos xdx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int\left(t^{10}-t^{12}\right)dt=\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{13}}{13}+C=$$

$$=\frac{\sin^{11}x}{11}-\frac{\sin^{13}x}{13}+C.$$

Пример 5.3. Найти интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$.

Решение. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\sin xdx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{1-t^2}{t^{\frac{2}{3}}}dt=-\int t^{-\frac{2}{3}}dt+\int t^{\frac{4}{3}}dt=$

$$=-3\sqrt[3]{t}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{t^7}+C=\frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x}-3\sqrt[3]{\cos x}+C.$$

Пример 5.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\cos^2 x-2}$.

Решение. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2} = \left| \begin{array}{l} t = tgx, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\left(\dfrac{3}{1+t^2} - 2\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{1-2t^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{1-\left(\sqrt{2}t\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}tgx}{1-\sqrt{2}tgx}\right| + C.$

Пример 5.5. Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx.$

Решение. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int t^{-\frac{4}{3}} dt - \int t^{\frac{2}{3}} dt =$

$= -\frac{3}{\sqrt[3]{t}} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} + C.$

Пример 5.6. Найти интеграл $\int \sin^4 2x dx.$

Решение. $\int \sin^4 2x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right)dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\int \cos 4x d\left(4x\right) +$

$+ \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{8}\int \cos 8x d\left(8x\right)\right) = \frac{3x}{8} - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C.$

Пример 5.7. Найти интеграл $\int \sin 3x \cos x dx.$

Решение.

$$\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 4x + \sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\int \sin 4x d\left(4x\right) + \frac{1}{2}\int \sin 2x d\left(2x\right)\right) = -\frac{1}{8}\left(\cos 4x + 2\cos 2x\right) + C.$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 5. Найти интеграл.

5.1. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$

5.2. $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x}$

5.3. $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$

5.4. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$

5.5. $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x}$

5.6. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$

5.7. $\int \frac{2tgx + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

5.8. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$

5.9. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x}$

5.10. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

5.11. $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$

5.12. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$

5.13. $\int \sin^4 x\sqrt[5]{\cos^3 x}dx$

5.14. $\int \sin^3 x\cos^8 xdx$

5.15. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$

5.16. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

5.17. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$

5.18. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

5.19. $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$

5.20. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

5.21. $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$

5.22. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

5.23. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

5.24. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$

5.25. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3}$

5.26. $\int \sin^6 x\cos^3 xdx$

Интегрирование иррациональных функций

Теория

I.Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

с помощью дополнения квадратного трёхчлена Ax^2+Bx+C до полного квадрата приводится к табличному интегралу 12^0 **.**

II. Интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$$

приводится к сумме двух интегралов (первый из которых вычисляется как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида **I.** Путём выделения в числителе производной от подкоренного выражения знаменателя, данный интеграл сводится к табличному.

III. Для интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ и $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ подходят подстановки $x=a\sin t$ и $x=atgt$ соответственно.

IV.Интеграл вида $\int \sqrt{Ax^2 + Bx + C}dx$ в зависимости от знака А выделением полного квадрата приводится к одному из интегралов вида **III.**

V.Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ (m, n, p – рациональные числа) выражаются через элементарные функции в следующих случаях.

1.если p-целое число (имеем интеграл от простейшей иррациональной функции);

2.если $\frac{m+1}{n}$ - целое число (замена, $a + bx^n = t^s$, где s-знаменатель числа p);

3.если $\frac{m+1}{n} + p$ -целое число (замена, $a + bx^n = t^s x^n$, где s-знаменатель числа p);

VI.Интеграл вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}\right)dx,$ где R-рациональная функция, a,b,c,d-постоянные, r_1, r_2, s_1, s_2- целые положительные числа , приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = u^m$$

(здесь число m - наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}$, т.е. m=НОК(s_1, s_2)).

Примеры

Пример 6.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} = \left| \begin{matrix} x - 2 = t \\ x = t + 2, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right| + C$$

Пример 6.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{\sqrt{6x - x^2}}$

Решение.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{6x - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{6x - x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(6-2x)-8}{\sqrt{6x - x^2}}dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{9 - \left(x^2 - 6x + 9\right)}} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(6x - x^2\right)}{\sqrt{6x - x^2}} =$$

$$=4\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-3)^2}}=-\frac{1}{2}2\sqrt{6x-x^2}=4\arcsin\frac{x-3}{3}-\sqrt{6x-x^2}+C$$

Пример 6.3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

Решение. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}=\left|x=2tgt, dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}\right|=\int\frac{1}{16tg^4t\sqrt{4tg^2t+4}}\frac{2dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{16}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t)}{\sin^4 t}=\frac{1}{16}\left\{\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}-\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}\right\}=\frac{1}{16}\left\{-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}\right\}+C=\frac{1}{16\sin t}\left(1-\frac{1}{3\sin^2 t}\right)+C$$

$$=\left|\frac{1}{\sin^2 a}=1+\frac{1}{tg^2a}\right|=\frac{1}{16}\sqrt{1+\frac{1}{tg^2t}}\left[1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{tg^2t}\right)\right]+C=\left|t=arctg\,\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{16}\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\left(arctg\,\frac{x}{2}\right)}}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{3tg^2\left(arctg\,\frac{x}{2}\right)}\right]+C=\frac{1}{16}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\left[\frac{2}{3}-\frac{4}{3x^2}\right]+C=\frac{1}{24x^3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+4}+C\,.$$

Пример 6.4. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Решение. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$

Воспользуемся формулами **V.** Здесь $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}.$

Т.к. $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ имеет случай **V.2.** Заметив, что знаменатель числа p равен 3, положим $t^3=1+x^{\frac{1}{4}}$.

Тогда $x=\left(t^3-1\right)^4\Rightarrow dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt.$

Следовательно $J=12\int t\left(t^3-1\right)^{-2}t^2\left(t^3-1\right)^3dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt=12\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4\right)+C=$

$$=\frac{3}{7}t^4\left(4t^3-7\right)+C=\frac{3}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\left[4\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)-7\right]+C=\frac{3}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\left[4x^{\frac{1}{4}}-3\right]+C=\frac{3}{7}\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C$$

Пример 6.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{5+x^3}}$

Решение. $J=\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{5+x^3}}=\int x^{-3}\left(5+x^3\right)^{-\frac{1}{3}}dx$

Воспользуемся формулами **V**. Здесь $m=-3, n=3, p=-\frac{1}{3}$. Т.к. $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$,то имеем случай **V.3.** Заметив, что знаменатель числа p равен 3, положим

$$5+x^3=x^3t^3 \Rightarrow x^3=5\left(t^3-1\right)^{-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{5}\left(t^3-1\right)^{-1/3} \Rightarrow dx=\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(t^3-1\right)^{-4/3}3t^2dt=-\sqrt[3]{5}t^2\left(t^3-1\right)^{-4/3}dt.$$

Тогда

$$J=\int \frac{-\sqrt[3]{5}t^2\left(t^3-1\right)^{-4/3}dt}{5\left(t^3-1\right)^{-1}t\sqrt[3]{5}\left(t^3-1\right)^{-1/3}}=-\frac{1}{5}\int tdt=-\frac{t^2}{10}+C=-\frac{1}{10}\left(\frac{5}{x^3}+1\right)^{2/3}+C=-\frac{\left(5+x^3\right)^{2/3}}{10x^2}+C$$

Пример 6.6. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$

Решение. Т.к. НОК(2,4)=4,то

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}=\int \frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+4}=\left|\begin{matrix} x=u^4 \\ dx=4u^3du \end{matrix}\right|=4\int \frac{u^2}{u^3+4}u^3du=4\int \frac{u^5du}{u^3+4}=4\int\left(u^2-\frac{4u^2}{u^3+4}\right)du=$$

$$=\frac{4}{3}u^3-\frac{16}{3}\ln\left|u^3+4\right|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right|+C$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 6. Найти интеграл.

6.1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$

6.2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$

6.3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$

6.4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx$

6.5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

6.6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

6.7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$

6.8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

6.9. $\int \sqrt{4-x^2}dx$

6.10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$

6.11. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6.12. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$

6.13. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6.14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$

6.15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

6.16. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$

6.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

6.18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$

6.19. $\int \frac{\sqrt{xdx}}{1-\sqrt[4]{x}}$

6.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

6.21. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$

6.22. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$

6.23. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$

6.24. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}dx}{x^2}$

6.25. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$

6.26. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$

Определенный интеграл.

Определение и вычисление определенного интеграла.

Теория

Пусть функция f(x) определена на отрезке [a,b] и a=$x_0, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$=b – некоторое разбиение этого отрезка. Сумма вида $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ называется интегральной суммой функции f(x).

Если существует конечный предел I интегральных сумм S_n при $\lambda = \max|\Delta x_k| \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [a,b], ни от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, то его называют определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем. Функция непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b dx = b - a$

2. Если функция f(x) интегрируема на отрезке[a,b] и $a<c<b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x) + \int\limits_c^b f(x)dx$$

3. Если функция f(x) и g(x) интегрируемы на отрезке [a,b], то при любых λ∈R и μ ∈R функция λf(x) + μ g(x) также интегрируема на отрезке [a,b] и

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) = \mu g(x)]dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

4. Если функция f(x) интегрируема и неотрицательна на отрезке [a,b], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то, какова бы ни была на этом отрезке ее первообразная F(x),справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Если функция f(x) непрерывна на промежутке, а функция x=φ(t) непрерывна вместе со своей производной $\varphi^{/}(t)$ и монотонна на промежутке [α,β] и a =φ(α), b=φ(β), то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(формула замены переменной в определенном интеграле).

Если функция u(x) и v(x) непрерывны вместе со своими производными на отрезке [a,b], то

$\int\limits_a^b udv = uv\int\limits_a^b - \int\limits_a^b vdu$ (вычисление определенного интеграла интегрированием по частям)

Примеры

Пример 7.1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 (2x^2+\frac{2}{x^4})dx$$

Решение

$$\int_1^2 (2x^2+\frac{2}{x^4})dx=\int_1^2 2x^2dx+\int_1^2 \frac{2}{x^4}dx=2\int_1^2 x^2dx+2\int_1^2 x^{-4}dx=2(\frac{x^3}{3}-\frac{x^{-3}}{3})\Big|_1^2=\frac{2}{3}\left(2^3-2^{-3}-1+1\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(8-\frac{1}{8}\right)=5\frac{1}{4}$$

Пример 7.2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Решение

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-1}^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2})=2\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

Пример 7.3. Вычислить определенный интеграл**.**

$$\int_0^\pi \sin 2x dx$$

Решение

$$\int_0^\pi \sin 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x d\left(2x\right)=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi=-\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi-\cos 0\right)=-\frac{1}{2}\left(1-1\right)=0$$

Пример 7.4. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_0^1 \frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2+1}=arctg\left(x+2\right)\Big|_0^1=arctg\left(1+2\right)-arctg\left(0+2\right)=arctg3-arctg2$$

Пример 7.5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

Решение.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{e^x-1}, x=\ln\left(t^2+1\right),\quad dx=\dfrac{2tdt}{1+t^2}= \\ x=0\Rightarrow t=0,\ \ x=\ln 2\Rightarrow t=1\end{array}\right|2\int_0^1 \frac{\left(1+t^2\right)-1}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$2\left(t-arctgt\right)\Big|_0^1=2\left(1-arctg1\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

Пример 7.6. Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Решение.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x, dt = \frac{dx}{x} \\ x = e^t, x = 1, t = 0 \\ x = e, t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 7.7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Решение.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{4-x}, x = 4 - t^2 \\ dx = -2tdt, x = 0, t = 2 \\ x = 2, t = \sqrt{2} \end{array} \right| = -2\int_2^{\sqrt{2}} \frac{tdt}{t} = -2\int_2^{\sqrt{2}} dt = -2t\Big|_2^{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} + 4$$

Пример 7.8. Вычислить определенный интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$

Решение

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{4}(x \cos 2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx = -\frac{1}{4}(x\cos 2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{8}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 2x - x\cos 2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 2\pi - \pi\cos 2\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

Пример 7.9. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 x^2 e^x dx$

Решение.

$$\int_0^2 x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x\Big|_0^2 - 2\int_0^2 xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = (x^2 e^x - 2xe^x)\Big|_0^2 + 2\int_0^2 e^x dx =$$

$$= (x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)\Big|_0^2 = 4e^2 - 4e^2 + 2e^2 - 2 = 2(e^2 - 1)$$

Пример 7.10. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

Решение

$$\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = \dfrac{dx}{x^2}, v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int\limits_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int\limits_1^e x^{-2}dx = (-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x})\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{\ln e}{e} - \frac{1}{e} + \frac{\ln 1}{1} + 1 == -\frac{2}{e} + 1$$

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 7. Вычислить определенный интеграл

7.1 $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$

7.2 $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$

7.3 $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$

7.4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$

7.5 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$

7.6 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.7 $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

7.8 $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$

7.9 $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

7.10 $\int\limits_0^3 x\ln(x+1)dx$

7.11 $\int\limits_3^8 \sqrt{x+1}dx$

7.12 $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

7.13 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^3 xdx$

7.14 $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

7.15 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx$

7.16 $\int\limits_1^6 \sqrt{x+3}dx$

7.17 $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

7.18 $\int\limits_1^{3} x\ln(x-1)dx$

7.19 $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx$

7.20 $\int\limits_0^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$

7.21 $\int\limits_1^{2} \ln(3x+2)$

7.22 $\int\limits_0^{1} xarctgxdx$

7.23 $\int\limits_3^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

7.24 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin xdx$

7.25 $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

7.26 $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

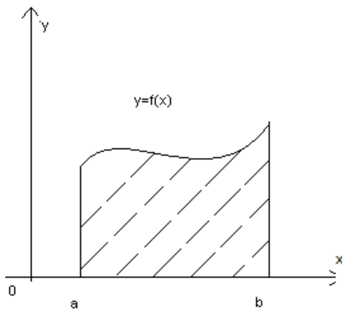
Приложение определённого интеграла.

Площадь плоской фигуры.

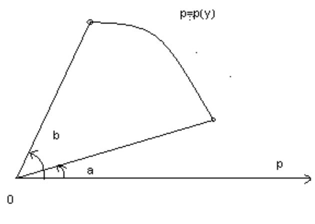
Теория

1. Если функция *f(x)* неотрицательна и непрерывна на отрезке *[a,b]* ,то площадь S криволинейной трапеции D=$\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$, выражается формулой

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx.$$



2. Пусть D- замкнутое плоское множество, ограниченное некоторой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta,$ и двумя отрезками лучей $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, т.е. $D=\{(\rho,\varphi)\in R^2 : \alpha\le\varphi\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}$.



Площадь S фигуры D выражается формулой:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

3. Если верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$, то её площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$$

Примеры

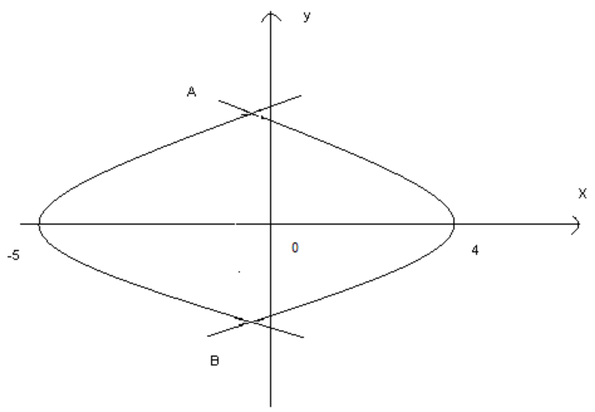
Пример 8.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=x+5, y^2=-x+4.$

Решение. Построим фигуру, ограниченную данными линиями. Для этого найдём точки пересечения, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2=x+5 \\ y^2=-x+4 \end{cases} \Rightarrow x+5=-x+4 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$y^2=-\frac{1}{2}+5; y^2=\frac{9}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Значит, данные линии (параболы) пересекаются в точках $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right); B\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$



В силу симметричности фигуры относительно оси OX имеем:

$$S=2S_1+2S_2=2\int_{-5}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x+5}dx+2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\sqrt{4-x}dx=2\int_{-5}^{-\frac{1}{2}}(x+5)^{1,2}d(x+5)-2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}(4-x)^{1/2}d(4-x)=$$

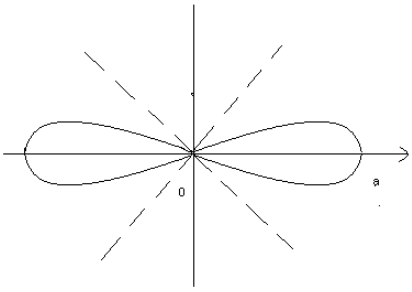
$$=2\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}\Bigg|_{-5}^{-\frac{1}{2}}-2\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{4}=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+5\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\left(4+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=12\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{18\cdot 2}{\sqrt{2}}=18\sqrt{2} \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 8.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\cos 2\varphi$.

Решение. Построим фигуру, заданную в полярных координатах $\rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

φ	***0***	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/4$	**….**	2π
ρ	***a***	$\sqrt{3}/2a$	$\sqrt{2}/2\pi$	$a/2$	***0***	***0***	**….**	***a***



$$S = 4S_1 = 4\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4\varphi d(4\varphi)\right) = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = a\left(\frac{\pi}{4}+0\right) = \frac{\pi a}{4} \text{ (кв.ед.).}$$

Пример 8.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией одной аркой циклоиды $x = 2(t-\sin t), y = 2(1-\cos t), 0 \le t \le 2\pi,$ и осью *Ox*.

Решение. Имеем

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)2dt = 4\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = 4\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt =$$

$$= 4\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt\right) = 4\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4(2\pi+\pi) = 12\pi \text{ (кв.ед.).}$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

8.1. $\rho = \sqrt[3]{\cos 2\varphi}$

8.2. $y = x^2, y = 3 - x$

8.3. $y = \sqrt{x}, y = x^3$

8.4. $x = 7\cos^3 t, y = 7\sin^3 t$

8.5. $\rho = 4\cos 3\varphi$

8.6. $\rho = 3\cos 2\varphi$

8.7. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$

8.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$

8.9. $x = 4(t-\sin t), y = 4(1-\cos t)$

8.10. $\rho = 2(1+\cos\varphi)$

8.11. $\rho = 2\sin 3\varphi$

8.12. $\rho = 2 + \cos\varphi$

8.13. $y = 1/\left(1 + x^2\right), y = x^2/2$

8.14. $y^2 = x + 1, y^2 = 9 - x$

8.15. $y^2 = x^2, x = 0, y = 4$

8.16. $\rho = 4\sin^2\varphi$

8.17. $x = 3\cos t, y = 2\sin t$

8.18. $y^2 = 9x, y = 3x$

8.19. $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$

8.20. $y = 4x, x^2 = 4y$

8.21. $y = x^3, x = 2$

8.22. $y = x^2, y = 2 - x^2$

8.23. $y^2 = 4 - x^3, x = 0$

8.24. $\rho = 3\sin 4\varphi$

8.25. $y = x^3, x = 0, y = 1$

8.26. $xy = 6, x + y - 7 = 0$

Длина дуги

Теория

Пусть Г - пространственная (или плоская) кривая, заданная параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,где t – параметр, принимающий значения из отрезка $[t_1, t_2]$,а функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_1, t_2]$. Тогда длина

дуги кривой Г вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Подынтегральное выражение называется дифференциалом дуги кривой Г:

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}\, dt.$$

В частности, если дуга задана явным уравнением, $y = f(x), a \le x \le b,$ то справедлива формула: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

Примеры

Пример 9.1. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$, заключённой между точками M_1 и M_2, с абсциссами $x_1 = 2,$ и $x_2 = 8.$

Решение. Воспользуемся формулой: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$ В данном случае $a = 2, b = 8.$

$$y' = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3}\right)' = \frac{1}{3}\left((2x-1)^{3/2}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{1/2}\cdot 2 = \sqrt{2x-1}.$$

Тогда: $L = \int\limits_2^8 \sqrt{1+(2x-1)}dx = \int\limits_2^8 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\int\limits_2^8 x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{28}{3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$ (лин.ед.).

Пример 9.2. Вычислить длину астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t.$

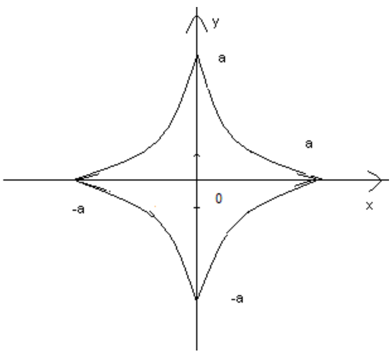
Решение. Построим данную линию.

Для этого составим таблицу значений данной функции:

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	**….**
	a	***0,7a***	***0,4a***	***0,1a***	**0**	**….**
	0	***0,1a***	***0,4a***	***0,7a***	**a**	**….**

Отложив в прямоугольной системе координат полученные точки и соединив, их, получим ветвь астроиды, расположенную в первой четверти (см. чертёж). Для построения оставшейся части необходимо придавать подходящие значения независимой переменной t в пределах от $\pi/2$ до 2π. При этом в силу свойств функций $sint$ и $cost$ переменные x и y будут принимать те же значения, что и в вышеприведенной таблице, но с другими знаками (+ или -).

Следовательно, остальные ветви астроиды будут симметричны относительно осей координат.



$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\left(3a\cos^2 t(-\sin t)\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}dt = 12a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=12a\int_0^{\pi/2}\sin t d(\sin t)=12a\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}=6a(1-0)=6a \text{ (лин.ед.).}$$

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 9. Вычислить длину дуги данной линии

9.1. $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$

9.2. $x=2(\cos t+t\sin t)y=2(\sin t-t\cos t)\quad(0\le t\le\pi)$

9.3. $\rho=\sin^3(\varphi/3)\quad(0\le\varphi\le\pi/2)$

9.4. $\rho=2\sin^3(\varphi/3)\quad(0\le\varphi\le\pi/2)$

9.5. $y=1-\ln\cos x\quad(0\le x\le\pi/6)$

9.6. $\rho=\cos^3(\varphi/3)\quad(0\le\varphi\le\pi/2)$

9.7. $x=4\cos^3 t, y=4\sin^4 t$

9.8. $\rho=6\cos^3(\varphi/3)\quad(0\le\varphi\le\pi/2)$

9.9. $\rho=3\cos\varphi$

9.10. $\rho=3(1-\cos\varphi)$

9.11. $\rho=2\cos^3(4/3)$

9.12. $x=5\cos^2 t, y=5\sin^2 t\quad(0\le t\le\pi/2)$

9.13. $\rho=3\sin\varphi$

9.14. $x=9(t-\sin t), y=9(1-\cos t)\quad(0\le t\le 2\pi)$

9.15. $\rho=2(1-\cos\varphi)$

9.16. $x=7(t-\sin t), y=7(1-\cos t)\quad(2\pi\le t\le 4\pi)$

9.17. $x=4\cos^3 t, y=t-t^3$

9.18. $x=\sqrt{3}t^2, y=t-t^3$

9.19. $\rho=5\sin\varphi$

9.20. $\rho=4\cos\varphi$

9.21. $\rho=5(1+\cos\varphi)$

9.22. $y^2=x^3$ от точки *A(0,0)* до точки *B(4,8)*

9.23. $y^2=(x-1)^3$ от точки *A(2,-1)* до точки *B(5,-8)*

9.24. $y^2=(x-1)^3$ от точки *A(1,0)* до точки *B(6,* $\sqrt{125}$ *)*

9.25. $y^2=(x+1)^3$, отсечённой прямой $x=4$

9.26. $y=2\sqrt{x}$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=1$

Объём тела.

Теория

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, а *P* – тело, полученное вращением криволинейной трапеции $D=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, 0\le y\le y(x)\}$ вокруг оси *Ox*. Тогда объём тела *P* вычисляется по формуле $V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$.

Объём тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Oy, вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_c^d x^2(y)dy=\pi\int_c^d x^2(y)dy$$

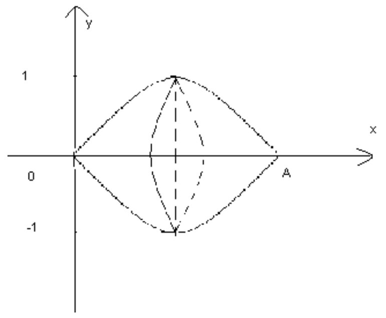
Примеры

Пример 10.1.Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

Решение. Сделаем чертёж. Для этого найдём точки пересечения данных линий.

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0.$$

$x_1 = 0, x_2 = 2. O(0;0), A(2;0)$



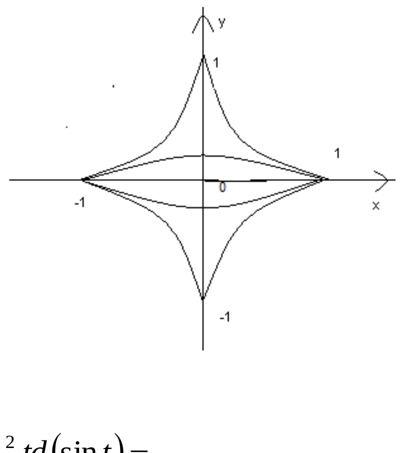
$$V = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) =$$

$$= \pi\frac{160 - 240 + 196}{15} = \frac{16}{15}\pi \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 10.2. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной линиями $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t.$

Решение. Сделаем чертёж.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	***1***	***0,7***	***0,4***	***0,1***	***0***
y	***0***	***0,1a***	***0,4***	***0,7***	***1***



$$V = \pi\int_{t_0}^{t_1} x^2(t)dy(t) = 2\pi\int_0^{\pi/2} \cos^6 t 3\sin^2 t\cos t dt = 6\pi\int_0^{\pi/2}\left(1 - \sin^2 t\right)^3 \sin^2 t d\left(\sin t\right) =$$

$$= 6\pi\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t - 3\sin^4 t + 3\sin^6 t - \sin^8 t\right)d\left(\sin t\right) = 6\pi\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{\sin^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 6\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{105}\pi \quad \text{(куб.ед.).}$$

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 10. Вычислить объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанной оси координат

10.1.Ф: $y^2 = 4-x, x=0, Oy$

10.2.Ф: $y^3 = x^2, y=1, Ox$

10.3.Ф: $x=6(t-\sin t), y=6(1-\cos t), Ox$

10.4.Ф: $x=3\cos^2 t, t=4\sin^2 t(0\le t\le \pi/2), Oy$

10.5.Ф: $y^2 = x, x^2 = y, Ox$

10.6.Ф: $y^2 = (x-1)^3, x=2, Ox$

10.7.Ф: $x=\sqrt{1-y^2}, y=\sqrt{\frac{3}{2}x}, y=0, Ox$

10.8.Ф: $y=\sin x, y=0(0\le x\le \pi), Ox$

10.9.Ф: $y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox$

10.10.Ф: $x=2\cos t, y=5\sin t, Oy$

10.11.Ф: $y=x^2, 8x=y^2, Oy$

10.12.Ф: $y=e^x, x=0, y=0, x=1, Ox$

10.13.Ф: $y^2 = \frac{4x}{3}, x=3, Ox$

10.14.Ф: $y=2x-x^2, y=0, Ox$

10.15.Ф: $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, полярная ось

10.16.Ф: $x=7\cos^3 t, y=7\sin^3 t, Oy$

10.17.Ф: $x^3 = (y-1)^2, x=0, y=0, Ox$

10.18.Ф: $xy=4, 2x+y-6=0, Ox$

10.19.Ф: $x=\sqrt{3}\cos t, y=2\sin t, Oy$

10.20.Ф: $y=2-x^2, y=x^2, Ox$

10.21.Ф: $y=-x^2+8, y=x^2, Ox$

10.22.Ф: $y^2 = (x+4)^3, x=0, Ox$

10.23.Ф: $y=x^3, x=0, y=8, Oy$

10.24.Ф: $y=\cos^3 t, y=\sin^3 t, Ox$

10.25.Ф: $2y=x^2, 2x+2y-3=0, Ox$

10.26.Ф: $y=x-x^2, y=0, Ox$

Несобственные интегралы.

Теория

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $a\le x\le +\infty$.

Предел

$$\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx \qquad \textbf{(11.1)}$$

называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом функции $y=f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \textbf{(11.2)}$$

Следовательно, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$$

Если предел (**11.1)** существует, то интеграл **(11.2)** называется сходящимся, если же предел **(11.1)** не существует, в частности бесконечен,- расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{B} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_c^B f(x)dx, \text{ где } -\infty \le c \le +\infty.$$

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, за исключением точки $x = c$, где она терпит бесконечный разрыв. Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx, \qquad \textbf{(11.3)}$$

где $\varepsilon_1 > 0; \varepsilon_2 > 0$. Интеграл **(11.3)** называется несобственным интегралом от неограниченной функции. Если оба предела, стоящие в правой части равенства **(11.3)** существует, то данный интеграл называется сходящимся, а если хотя бы один из них не существует, то-расходящимся. В случае, когда $c = a$ или $c = b$, в правой части равенства **(11.3)** будет только один предел.

Примеры

Пример 11.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8} = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{(x+2)^2+4} = \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}\Bigg|_0^B = \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(arctg\frac{B+2}{2} - arctg\frac{2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 11.2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке *x=1*.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left((-2)(1-x)^{1/2}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-1+\varepsilon}-\sqrt{1-0}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Пример 11.3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=-2$. Поэтому

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2+\varepsilon}^{1}(x+2)^{-2}d(x+2) = -\lim_{\varepsilon\to 0}(x+2)^{-1}\Big|_{-2+\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$$

.

Следовательно, данный интеграл расходится.

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 11. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

11.1. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$

11.2. $\int_1^{\infty}\frac{16xdx}{16x^4-1}$

11.3. $\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$

11.4. $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$

11.5. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

11.6. $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$

11.7. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$

11.8. $\int_4^{\infty}\frac{xdx}{4x^2-4x+1}$

11.9. $\int_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$

11.10. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$

11.11. $\int_0^{1/3}\frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}dx$

11.12. $\int_1^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$

11.13. $\int_{1/3}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$

11.14. $\int_0^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$

11.15. $\int_0^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

11.16. $\int_{-1/3}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$

11.17. $\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

11.18. $\int_0^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}dx$

11.19. $\int\limits_1^{\infty} \frac{4dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$

11.20. $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x} x dx$

11.21. $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$

11.22. $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt[3]{9x}dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

11.23. $\int\limits_0^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

11.24. $\int\limits_0^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$

11.25. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$

11.26. $\int\limits_1^{5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{31\left(x^3-1\right)}}$

Пример выполнения и оформления типового варианта контрольной работы

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx = I.$

Воспользуемся подстановкой $t = \cos 2x, dt = -2\sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt.$

Получим $I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+3t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3t)}{1+3t} = -\frac{1}{6}\ln|1+3t| + C = -\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x| + C.$

При решении этого примера использованы следующие свойства дифференциала:

$dx = \frac{1}{a} d(ax)$ и $dx = d(x \pm a)$, согласно которым $dt = \frac{1}{3} d(1+3t)$, затем применяется формула

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C .$$

Сделаем проверку, для этого возьмём производную от полученного выражения:

$$\left(-\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x| + C\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1+3\cos 2x)'}{1+3\cos 2x} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{-6\sin 2x}{1+3\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} .$$

Получим подынтегральную функцию, следовательно, интеграл нашли верно.

Задание 2. Найти неопределённый интеграл $\int \arccos 3x dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. $\int \arccos 3x dx$ =I. Применим формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

$$I=\left|\begin{matrix}u=\arccos 3x, du=-\dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}\\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right|=x\arccos 3x+3\int\frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}}=x\arccos 3x+$$

$$+3\left(-\frac{1}{18}\right)\int\left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-9x^2\right)=x\arccos 3x-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C$$

Сделаем проверку, для этого возьмём производную от полученного выражения;

$$\left(x\arccos 3x-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C\right)'=\left(x\arccos 3x\right)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{18x}{2\sqrt{1-9x^2}}=\arccos 3x$$

Получим подынтегральную функцию, следовательно, интеграл нашли верно.

Задание 3. Найти неопределённый интеграл $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$

Решение. $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$=I. Применим метод подстановки. Подберём такую замену, чтобы избавиться от квадратного и кубического корней. Подходящей заменой является $x=t^6$, так как НОК (2,3)=6.

$$I=\left|\begin{matrix}x=t^6, dx=6t^5dt\\ \sqrt[3]{x^2}=t^4, \sqrt{x}=t^3\end{matrix}\right|=\int\frac{t^3 6t^5dt}{3t^6+t^4}=6\int\frac{t^8dt}{t^4\left(3t^2+1\right)}=6\int\frac{t^4dt}{3t^2+1}=\frac{6}{9}\int\frac{9t^4-1+1}{3t^2+1}dt=\frac{2}{3}\int\left(3t^2-1+\frac{1}{3t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(t^3-t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{3t^2+1}d\left(\sqrt{3}t\right)\right]=\frac{2}{3}\left[\left(t^3-t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}t\right)\right]+C=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\sqrt{3}t+C=$$

$$=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{3}t+\frac{2\sqrt{3}}{9}arctg\sqrt{3}t+C=\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt{3}}{9}arctg\sqrt[6]{27}x+C.$$

Задание 4. Найти неопределённый интеграл $\int\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx.$

Решение. $\int\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$=I. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим её знаменатель на множители:

$$x^3-3x^2+2x=x\left(x^2-3x+2\right)=x\left(x-2\right)\left(x-1\right).$$

Согласно формуле разложения правильной дроби на простейшие, каждому множителю знаменателя вида *x-a* соответствует слагаемое $\frac{A}{x-a}$. В данном случае имеем

$$I=\int\frac{3x^2-6x+2}{x\left(x^2-3x+2\right)}dx=\int\frac{3x^2-6x+2}{x(x-1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx.$$

Приведём дроби из данного разложения к общему знаменателю и приравняем числители последних двух подынтегральных выражений:

$$3x^2-6x+2=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

или

$$3x^2-6x+2=(A+B+C)x^2+(-3A-2B-C)x+2A$$

Теперь приравняем коэффициенты перед неизвестными в правой и левой частях последнего равенства и найдём из полученной системы коэффициенты *A,B,C:*

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=3 \\ x^1 & -3A-2B-C=-6 \\ x^0 & 2A=2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\}\Rightarrow A=1, B=1, C=1.$$

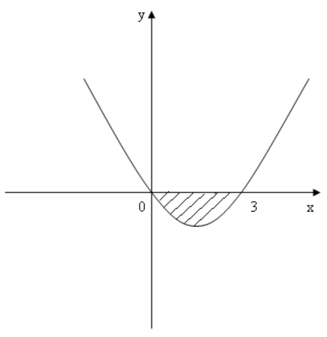
$$\int\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=\ln|x|+\ln|x-1|+\ln|x-2|+C=\ln|x(x-1)(x-2)|+C.$$

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4t^2-6t, x=2t$ и осью *Ox*.

Решение. Построим фигуру, ограниченную данными линиями. Для этого найдём точки их пересечения:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=4t^2-6t\Rightarrow 4t^2-6t=0\Rightarrow 2t(2t-3)=0\Rightarrow t_1=0, t_2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_1=0, x_2=3. \\ x=2t \end{cases}$$

Следовательно, линии пересекаются в точках $O(0;0), A(3;0)$ и $0\le t\le\frac{3}{2}$.



$$S=-\int_0^{3/2}\left(4t^2-6t\right)2dt=-4\int_0^{3/2}\left(2t^2-3t\right)dt=-4\left(\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right)\Bigg|_0^{3/2}=-4\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=$$

$$=-4\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left[\frac{2}{3}-1\right]=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}\quad \text{(кв. ед.)}.$$

Перед интегралом выбран знак «минус», так как фигура расположена под осью Ox.

Задание 6. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}.$$

Решение. Данный интеграл является несобственным интегралом с бесконечными нижним и верхним пределами. Для его вычисления применим формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^C f(x)dx+\lim_{B\to+\infty}\int_C^B f(x)dx,$$ полагая $C=0$, имеем:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{x^2+4x+13}+\lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{x^2+4x+13}.$$

Выделим в знаменателях подынтегральных функций полный квадрат, получим:

$$x^2+4x+13=(x+2)^2+9$$

$$I=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{(x+2)^2+9}+\lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}\Bigg|_A^0+\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}\Bigg|_0^B=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\,\frac{2}{3}-arctg\,\frac{A+2}{3}\right)+\frac{1}{3}\lim_{B\to+\infty}\left(arctg\,\frac{B+2}{3}-arctg\,\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}arctg\,\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}arctg\,\frac{2}{3}=\frac{\pi}{3}$$

Литература

1. Назаров А.И. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.- 576 с.
2. Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.- 240 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 17-е изд. М., «НАУКА», 2006.
4. Высшая математика. Решебник под ред. А.И. Кириллова. ФИЗМАТЛИТ М-2003г.

Курбанов К.О., Умалатов С.Д.

«Интегральное исчисление функции одной переменной»

Учебное пособие

Подписано в печать

15.11. 2012г .

Формат 60×84 1/32. Бумага офсетная.

Печать ризограф. Усл. п.л.3.

Тираж 100 экз. заказ №

Отпечатано в ИПЦ МФ МАДИ (ГТУ)

367026, г. Махачкала, пр. Шамиля,1