МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
М А Х А Ч К А Л И Н С К И Й   Ф И Л И А Л
ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»

Кафедра Математики и Информатики

Дибирова З.Г., Гаджиева А.М.

Числовые и функциональные ряды

Учебно – методическое пособие

Махачкала - 2013

УДК 517

Гаджиева А.М., Дибирова З.Г. «Числовые и функциональные ряды». Учебно-методическое пособие. Махачкала, Махачкалинский филиал МФ МАДИ (ГТУ), 2013г-30с.

Учебное-методическое пособие предназначено для студентов вторых курсов всех специальностей, изучающих дисциплину «Математика». Пособие содержит теоретические сведения раздела курса математического анализа - Теория рядов, а также подобраны примеры и расчетно-графические задания.

Составители:

Дибирова З.Г. – к.п.н., доцент кафедры Математики и Информатики Махачкалинского филиала МАДИ

Гаджиева А.М. - ст. преп. кафедры Математики и Информатики Махачкалинского филиала МАДИ

Рецензенты:

Баламирзоев А. Г. - д.т.н., профессор кафедры Математики и Информатики Махачкалинского филиала МАДИ.

Умалатов С.Д. –к.ф.м.н., доцент кафедры высшей математики ДГТУ.

Оглавление

Предисловие

Методическое пособие предназначено для студентов вторых курсов. В пособии собрано большое количество интересных примеров по одному из важнейших разделов курса математического анализа – теории рядов. Также подобраны примеры, иллюстрирующие различные положения теории рядов и методы решения задач с их использованием. Оно состоит из двух глав:

Глава I. «Числовые ряды» и Глава II. «Функциональные ряды».

В начале приводится теоретический материал, необходимый для решения примеров, затем приводятся решения примеров. После этого даются типовые расчетные задания по каждой теме.

Предлагаем внимательно прочитать теоретический материал, запомнить приведенные определения, теоремы и формулы, разобрать рассмотренные в тексте примеры и только после этого приступать к самостоятельному решению примеров и задач.

Глава I. Числовые ряды.

<u>Вводные замечания.</u>

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, Ньютон и Лейбниц представляли подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом элементов. Также И. Ньютон и Г. Лейбниц систематически использовали ряды для решения как алгебраических, так и дифференциальных уравнений.

Формальная теория рядов усиленно развивалась в XVIII и XIX вв. В работах И.Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа. В этот период использовались как сходящиеся, так и расходящиеся ряды. Точная теория рядов была создана в XIX веке на основе понятия предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцана, О. Коши, П. Дирихле, Н. Абеля, К. Вейерштрасса, Б. Римана и других.

§ 1. Числовой ряд и его сумма.

П.1.1. Определение числового ряда.

<u>Определение 1.</u> Пусть задана бесконечная последовательность:

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

называется числовым рядом и обозначается следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

При этом числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются элементами ряда.

Определение 2. Сумма конечного числа n первых элементов ряда называется n-й частичной суммой ряда:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$,.

Рассмотрим частичные суммы:

$S_1 = u_1$;

$S_2 = u_1 + u_2$;

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$;

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

то его называют суммой ряда (1) и говорят, что ряд сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, (например $S_n \to \infty$, при $n \to \infty$), то говорят, что ряд расходится и суммы не имеет.

Пример 1.

Ряд: 1+2+3+4+ … + n + … расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, …, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, … имеет бесконечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

Пример 2.

Ряд: $1-1+1-1+ \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ - расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм:

$S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, …, $S_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, … не имеет никакого предела.

Замечание 1.

Когда последовательность S_1, S_2, S_3, … не имеет никакого предела, расходящийся ряд называется неопределенным.

Пример 3.

Ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+(\frac{1}{2})^{n-1}+...$ - сходящийся, т.к. последовательность

$S_1 = 1$, $S_2 = 1\frac{1}{2}$, $S_3 = 1\frac{3}{4}$, ..., $S_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$, …

имеет предел, равный 2, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$

Число 2 есть сумма ряда.

П.1.2. Необходимое условие сходимости ряда.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, + \ldots \qquad (2)$$

сходится, то предел его общего элемента равен нулю:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ – необходимое условие, но недостаточное, т.е.

если же $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (2) может сходиться, а может и расходиться, Требуется дополнительное исследование.

Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому условию сходимости, служит так называемый гармонический ряд.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... = \sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, но можно доказать, что ряд расходится.

Пример 4.

Показать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ необходимое условие сходимости выполняется, но сам ряд расходится.

Решение:

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ необходимое условие сходимости выполняется. Для доказательства расходимости данного ряда оценим его n-ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2}\text{, т.е.}$$

$S_n \geq \sqrt[3]{n^2}$. Т.к. при $n\to\infty$ $\sqrt[3]{n^2}\to\infty$, то $S_n\to+\infty$.

Пример 5.

Ряд: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$

Подчеркнем, что рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным.

§ 2. Сходимость рядов с положительными элементами.

Положительный ряд, (т.е. ряд, все элементы которого положительны) не может быть неопределенным. Его частичные суммы всегда имеют предел конечный или бесконечный. В первом случае ряд сходится, во втором – расходится.

Положительный сходящийся ряд при перестановке элементов остается сходящимся и сумма его не изменяется, расходящийся положительный ряд остается расходящимся.

Важную роль в теории рядов играют ряды с положительными элементами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0 \qquad (1)$$

Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Если же ряд (1) расходится, то его частичные суммы стремятся к бесконечности: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Рассмотрим основные достаточные признаки сходимости рядов с положительными элементами.

П.2.1. Признак сравнения.

Признак сравнения.

Если для ряда (1) и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n>0$, существует такая постоянная k>0, что $u_n \le k v_n$, для всех достаточно больших n, то:

А) из сходимости ряда (2), где следует сходимость ряда (1).

Б) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Сравнение исследуемых рядов производится обычно с рядами:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ (сумма геометрической прогрессии, сходящейся при $|q| < 1$ и расходящейся при $|q| \ge 1$);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при p>1 и расходящийся при $p \le 1$).

Пример 1.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)7^n}$

Решение:

Сравнивая $u_n=\frac{n}{(n+3)7^n}$ с $v_n=\frac{1}{7^n}$, замечаем, что $u_n < v_n$ при всех n. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$ - сходится, (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $q=\frac{1}{7}$), то по признаку сравнения данный ряд сходится.

Из сходимости ряда v_n следует сходимость ряда u_n.

П.2.2. Признак Даламбера для положительного ряда.

<u>**Теорема.**</u> (Признак Даламбера).

Если в ряде с положительными элементами $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, + \ldots$ (1) отношение (n+1) –го элемента к n-ному при $n\to\infty$ имеет (конечный) предел l, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ (2)

то:

1). Ряд сходится в случае $l < 1$;

2). Ряд расходится в случае $l > 1$;

3). При $l = 1$ может сходиться или расходиться – в этом случае вопрос сходимости ряда остается открытым.

<u>**Пример 2.**</u>

Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

Решение:

$u_n=\frac{2^n}{n}$; $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}:\frac{2^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1.$$

Ряд расходится, т.к. $l = 2 > 1$.

П.2.3. Признак Коши.

Теорема: (Признак Коши).

Если для ряда с положительными элементами $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,

то:

1) в случае $l < 1$ ряд сходится;
2) в случае $l > 1$ ряд расходится;
3) при $l = 1$ возможны случаи как сходимости, так и расходимости ряда.

Пример 3.

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Решение:

$$U_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1, \qquad \text{т.к. } l = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно ряд сходится.

П.2.4. Интегральный признак сходимости ряда.

Интегральный признак Маклорена – Коши основан на сравнении рядов с несобственными интегралами.

Теорема:

Пусть элементы ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n,} + \ldots$ (1)

положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_{n,} \geq \ldots$ и пусть f(x) – непрерывная, невозрастающая функция такая, что

$f(1) = u_1;\ f(2) = u_2;\ \ldots;\ f(n) = u_n$ (2)

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1);

2) если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

<u>Пример 4.</u>

Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ldots$$

Решение:

Возьмем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $x \in [2;+\infty)$;

Она непрерывна и убывает. Вычислим

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{a\to\infty} (\ln\ln x|_2^a) = \infty$$

Из расходимости этого несобственного интеграла следует расходимость исследуемого ряда.

§ 3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд называется знакопеременным, если его элементы поочередно положительны и отрицательны.

Ряд:

$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$ (1)

где u_1, u_2, u_3... обозначают положительные числа, - знакопеременный.

***Теорема.* (Признак Лейбница)**

Если абсолютные величины элементов знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \ldots$ (1) монотонно убивают: $u_1 > u_2 > u_3 \ldots$ и общий элемент ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится и его сумма не превосходит первого элемента u_1.

***Теорема*. (Признак сходимости)**

Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его элементов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (2)$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение 1.

Знакопеременный ряд.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его элементов:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (2)$$

Определение 2.

Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2), составленный из абсолютных величин его элементов расходится, то данный знакопеременный ряд (1) называется условно сходящимся рядом.

Пример 1.

Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$

Решение:

Знакопеременный ряд $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$ сходится абсолютно, т.к. ряд составленный из абсолютных величин его элементов:

$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$ сходится, т.е. $u_n = \frac{1}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Следовательно по признаку Даламбера ряд сходится.

<u>Пример 2.</u>

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Данный ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}$ является знакопеременным, и сходится условно, так как ряд, составленный из модулей его элементов, расходится как обобщенный гармонический с показателем p $=\frac{1}{2}<1$.

Глава II. Функциональные ряды.

§ 1. Функциональный ряд и область его сходимости.

Функциональным рядом называется выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ ... (элементы ряда) определенные в некотором промежутке *(a,b).*

Придавая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Множество всех значений x, для которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда. Может оказаться, что для некоторых x є *(a,b)* ряд (1) сходится абсолютно, а для некоторых условно. Поэтому, различают также области абсолютной и условной сходимости функционального ряда.

Если функциональный ряд имеет в некотором промежутке своей суммой функцию *f(x),* то говорят, что функциональный ряд сходится в этом промежутке k функции *f(x).* Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать известные ряды и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

<u>Пример 1.</u>

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Решение:

При x = 0 сходимость ряда очевидна. Пусть x≠0. Применим признак Даламбера. Так как

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot x^n}\right| = |x|.$$

Ряд сходится, и притом абсолютно, при $|x|<1$. При $|x| > 1$ ряд расходится, как неудовлетворяющий необходимому признаку сходимости.

Если $|x|=1$, то признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает. При x=1 получается гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а он расходится; при x=-1 получается сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Область сходимости данного ряда -1≤x<1.

Пример 2.

Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots \ln^n x + \dots$$

Данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q=lnx.

Так как прогрессия геометрическая сходится при |q|<1, то данный ряд сходится абсолютно при |lnx|<1, т.е. при -1<lnx<1.

Следовательно, неравенства $e^{-1}<x<e$ определяет область сходимости данного ряда.

§2. Степенные ряды.

Определение:

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... - постоянные числа называемые коэффициентами ряда, *а* так же ряд более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \qquad (2)$$

где x_0 – постоянная величина.

О ряде (1) говорят, что он разложен по степеням x, о ряде (2) – что он разложен по степеням $x-x_0$.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится при x = $x_0 \neq 0$, то он сходится, и причем абсолютно, для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $-|x_0| < x < |x_0|$. Если же степенной ряд расходится при $x=x_0$, то он расходится и для всех значений x, для которых $|x|>|x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что всякая точка его сходимости расположена не дальше от точки x=0 , чем всякая точка расходимости.

Так же из теоремы вытекает, что существует интервал $-R<x<R$, для $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для всех $|x|>R$ – расходится.

Этот интервал называется интервалом сходимости, а число R – радиусом сходимости степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по одной из формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right| \qquad (3)$$

Исследовать степенной ряд на сходимость, значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.

Область сходимости степенного ряда всегда состоит из его интервала сходимости и ,быть может, граничных точек этого интервала.

Пример 1.

Найти радиус и область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{2^n}$$

Решение.

$a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; $\quad a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, тогда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2}{(n+1)^2} = 2$$

Радиус сходимости степенного ряда равна 2. Интервал сходимости $-2<x<2$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала.

При x = ±2степенной ряд примет вид: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\cdot n^2$

Оба ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому признаку сходимости. Следовательно, область сходимости степенного ряда совпадает с его интервалом сходимости: -2<x<2.

§3. Разложение функций в степенные ряды.

Если функция f(x) имеет в точке x=*a* и некоторой окрестности производные до (n+1)-го порядка включительно, то в каждой точке этой окрестности она представлена формулой Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

где $R_n(x)$ - остаточный элемент формулы Тейлора, который может быть записан в виде:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где 0<ϴ<1

Если функция f(x) имеет производные всех порядков в окрестности точки x=*a*, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный элемент R_n стремится к нулю при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

Тогда переходя в формуле (1) к пределу при $n\to\infty$ получим справа бесконечный ряд, который называется рядом Тейлора:

$$F(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \qquad (2)$$

Если в ряде Тейлора положим a = 0, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \qquad (3)$$

При разложении функции в степенные ряды можно применять следующие приемы:

1) Непосредственное разложение функции f(x) в ряд Тейлора:
2) Использование разложений основных элементарных функций в степенные ряды.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (|x|<\infty); \qquad (4)$$

$$\text{Sin x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (|x|<\infty); \qquad (5)$$

$$\text{Cos x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (|x|<\infty); \qquad (6)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad (|x|<1); \qquad (7)$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \quad (|x|<1); \qquad (8)$$

(m – любое действительное число)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (-1\le x\le 1); \qquad (9)$$

$$\text{arctg x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (|x|\le 1). \qquad (10)$$

Используя эти разложения, можно находить разложения многих других функций. Так, например, для нахождения разложения в ряд по степеням x функции $\sin x^3$ нужно в равенстве (5) заменить x на x^3, также можно получить разложение функции e^{-x}, если в формуле (4) заменить x на –x.

Пример 1.

Разложить функцию Маклорена $f(x) = 2^x$ по степеням x (т.е. в ряд Маклорена).

Применим прием непосредственного разложения.

$f(x) = 2^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = 2^x \ln 2 \qquad f'(0) = \ln 2$

$f''(x) = 2^x \ln^2 2 \qquad f''(0) = \ln^2 2$

\- -

$f^n(x) = 2^x \ln^n 2 \qquad f^n(0) = \ln^n 2$

\- -

Подставляя найденные значения производных в выражения (2) при a=0, получаем ряд Тейлора для функции 2^x по степеням x:

$$1 + \frac{\ln 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \ldots$$

<u>Пример 2.</u>

Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \cos(\frac{x^2}{3})$

Полагаем $\frac{x^2}{3} = y$ и используем табличное разложение (6). Тогда

$$\cos\frac{x^3}{3} = \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^6}{2!3^2} + \frac{x^{12}}{4!3^4} - \frac{x^{18}}{6!3^6} + \ldots$$

Так как разложение в ряд функций cos y имеет место для всех y, то и разложение в ряд данной функции имеет место для всех x.

<u>Типовое расчетное задание.</u>

<u>Задача 1.</u>

Исследовать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{10n}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n} 2$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^n+1}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n+1}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3+n^2}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Задача 2.

С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{(n^2+2)\cdot 2^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-3)^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3n+1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\log_2^2 n}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n'}}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$; α>0 ;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; 29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$.

Задача 3.

Исследовать на сходимость следующие ряды с помощью признака Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{10}{11})^n\cdot n^5$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{11}{10})^n\cdot\frac{1}{n^5}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+2)!]^2}{(2n+2)!}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n}{n!}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)(\frac{e}{n})^n$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n^4}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

Задача 4.

С помощью признака Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{3n+1})^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{5n+3})^n$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+n}{n})^{\frac{n}{3}}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\cdot n^2}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1})^n$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{4^n}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n^2+3}{2+3n^2})^n$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{1+3n})^{\frac{n}{2}}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-2}{n^3})^n$

Задача 5.

Исследовать на сходимость следующие ряды с помощью интегрального признака:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3+n^2}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n+1}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

Задача 6.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие знакочередующиеся и знакопеременные ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n}$;

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n}}{(2n+1)^{n}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\,\frac{1}{4n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{2n+100}{3n+1})^{n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{100}{n}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n-3)}{n^2-1}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$;

16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{6n-5}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{2n+1}{3n+1})^{n}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^{10}}{e^n}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{3n+2}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)^2}{n^2+1}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})^{n}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^{n}}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$

Задача 7.

Найти радиус и интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n\cdot 2^{n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^{2}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{n}}{n}$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{5}\cdot x^{2n}}{2n+1}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n^{n}}$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty}3^{n^{2}}x^{n^{2}}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(\frac{x}{2})^{n}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^{n}}{n^{n}}$;

13) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n}\cdot\ln n}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^{2}}}{2^{n-1}n^{n}}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n}}{n\cdot 5^{n}}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^{n}}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+3)^{n}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^{n}}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n}}{n\cdot 2^{n}}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n}(1+x^{2})$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\cdot tg\,\frac{x}{3^{n}}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}(3-x^{2})^{n}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-2)^{n}}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}(\frac{n}{e})^{n}x^{n}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{\sin n})^{n}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{n}(x+3)^{n}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^{n}}{n^{n}}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n^{2}}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{(2n)!}x^{n}$.

Задача 8.

Следующие функции разложить в ряд Маклорена по степеням x и найти интервалы сходимости:

1) $f(x) = \cos 5x$;
2) $f(x) = \sin x^2$;
3) $f(x) = \cos \dfrac{2x^3}{3}$;
4) $f(x) = e^{3x}$;
5) $f(x) = e^{-x^4}$;
6) $f(x) = 5^x$;
7) $f(x) = 2^{-x^2}$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$;
9) $f(x) = \sin \dfrac{x^2}{2}$;
10) $f(x) = \arcsin x$;
11) $f(x) = e^{x^2}$;
12) $f(x) = 9^x$;
13) $f(x) = \ln \dfrac{2+x}{2-x}$;
14) $f(x) = \ln(1+2x^2)$;
15) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;
16) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;
17) $f(x) = \sin^2 x$;
18) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
19) $f(x) = \dfrac{1}{5+2x}$;
20) $f(x) = \ln(5+3x)$;
21) $f(x) = \dfrac{2}{1-3x^2}$;
22) $f(x) = \ln^2(1-x)$;
23) $f(x) = e^{x\cdot} \cdot \cos x$;
24) $f(x) = e^x \cdot \sin x$;
25) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$;
26) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$;
27) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$;
28) $f(x) = \sin 3x + x \cdot \cos 3x$;
29) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$;
30) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

Задача 9

1) Разложить функцию f(x) = $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ в ряд по степеням x + 4;
2) Разложить функцию f(x) = ln x в ряд по степеням x-1;

3) Разложить функцию f(x) = $\frac{-1}{x^2}$ в ряд по степеням x+1;

4) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням x-1;

5) Разложить функцию f(x) = e^x в ряд по степеням x+2;

6) Разложить функцию f(x) = $\sqrt{x}$ в ряд по степеням x-4;

7) Разложить функцию f(x) = $\cos x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{2}$;

8) Разложить функцию f(x) = $\cos^2 x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$;

9) Разложить функцию f(x) = $\frac{-1}{3+x}$ в ряд по степеням x+2;

10) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{\sqrt{4+x}}$ в ряд по степеням x+3;

11) Разложить функцию f(x) = tgx в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$;

12) Разложить функцию f(x) = $\sin x$ в ряд по степеням $x-\pi$;

13) Разложить функцию f(x) = $\sin^2 x$ в ряд по степеням $x-2\pi$;

14) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд по степеням x+4;

15) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням x+2;

16) Разложить функцию f(x) = $arctgx$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$;

17) Разложить функцию f(x) = $\arcsin x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{6}$;

18) Разложить функцию f(x) = $\arccos x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$;

19) Разложить функцию f(x) = e^{x^2} в ряд по степеням x+4;

20) Разложить функцию f(x) = e^x в ряд по степеням x-2;

21) Разложить функцию f(x) = x^3-2x^2+5x-7 в ряд по степеням x-1;

22) Разложить функцию f(x) = x^3 в ряд по степеням x+1;

23) Разложить функцию f(x) = e^{-x^2} в ряд по степеням x-1;

24) Разложить функцию f(x) = 3^x в ряд по степеням x-2;

25) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд по степеням x+1;

26) Разложить функцию f(x) = $\frac{3}{4-x}$ в ряд по степеням x+2;

27) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{3+2x}$ в ряд по степеням x+3;

28) Разложить функцию f(x) = $\frac{1}{1+2x}$ в ряд по степеням x+1;

29) Разложить функцию f(x) = $\cos x^2$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{2}$;

30) Разложить функцию f(x) = $\sin x^2$ в ряд по степеням $x-\pi$.

Литература.

1.Назаров А.И. Курс математика для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.-576 с.
2.Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.-240 с.
3. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Письменный Д.Т., М, Айрис Пресс, 2006.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1.2. М., Интеграл-Пресс, 2005.
5. Берман Г.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу , 17-е издание.М., «НАУКА», 2006.

Дибирова З.Г., Гаджиева А.М.

Числовые и функциональные ряды

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка Гаджиев Г.К.
Подписано в печать Формат 60x84/16
Гарнитура Times. Печать оперативная. Бумага потребительская.
Усл. п.л. Тираж 80 экз. Заказ №

МАХАЧКАЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ
ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»

Отпечатано в Махачкалинском филиале МАДИ
367026, Махачкала пр. Шамиля, 1