ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МАХАЧКАЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧЕРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕСИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКОГО АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра «Математика и Информатика»

Алиева Х.Р., Шамов Э.Ш.

«Неопределенный интеграл»

(методические указания и задания для типового расчета)

Махачкала 2011г.

УДК 517

Методические указания и задания и задания для типового расчета по теме «Неопределенный интеграл».

Махачкала, МФ МАДИ (ГТУ), 2011г., стр.37

Методические указания предназначены для студентов первых курсов всех специальностей МФ МАДИ (ГТУ). Цель данных методических указаний – помочь студентам освоить тему «Неопределенный интеграл» и выполнить типовой расчет по данной теме. Для этого в методических указаниях приводится необходимая теория с множеством решенных примеров.

Методические указания могут быть использованы и студентами заочной формы обучения.

Составители:

старший преподаватель кафедры МиИ
МиИ МАДИ (ГТУ) Алиева Х.Р.
ассистент кафедры. ВМ ДГТУ Шамов Э.Ш.

Рецензенти:

кандидат ф.м.н., проф. каф. ВМ ДГТУ.
Хайирбеков Т.Э.
к.ф-м.н. проф. зав. каф.
МиИ МАДИ (ГТУ) Курбанов К.О.

Печатается согласно Постановлению Ученого совета Махачкалинского филиала МАДИ (ГТУ) от “ 10 ” марта 2011 г.

Оглавление

Предисловие

Данные методические указания имеют своей целью создание навыков при вычислении неопределенных интегралов, поэтому теоретический материал этой темы изложен в виде определений и правил, которые иногда дополняются пояснениями.

Методические указания состоят из трех глав. В главе I приводятся основные понятия и определения неопределенного интеграла. Здесь также приводится таблица неопределенных интегралов и основные свойства. В методических указаниях особое внимание уделяется методам решения неопределенного интеграла. В каждом методе приведены примеры с решениями. Знание всех этих методов помогает студенту успешно применять различные методы при вычислении неопределенных интегралов.

В главе II подробно рассматривается интегрирование простейших рациональных и иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен. Здесь отдельно рассматриваются неопределенные интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx, \quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Рассматривается также интегрирование тригонометрических функций. Основной трудностью для студентов при интегрировании тригонометрических функций является плохое усвоение школьного курса тригонометрии, незнание многих тригонометрических формул. Другой трудностью при интегрировании тригонометрических функций являются искусственные преобразования, которые студенты также не умеют.

В главе III приведены примеры неопределенных интегралов, которые студенты должны решать на практических занятиях, а также типовой расчет по теме «Неопределенный интеграл».

Глава I

§1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении мы решили задачу о нахождении мгновенной скорости движения. Именно, исходя из заданного закона движения $S = F(t)$, определяющего изменение пути S с течением времени t, мы нашли скорость V движения как производную пути S по времени t:

$$V = S' = F'(t).$$

Однако часто приходится решать как раз обратную задачу, т.е. по заданной скорости находить пройденный путь S.

В этом случае мы должны решить задачу, обратную задаче дифференцирования, называемого *интегрированием,*

Определение 1. Функция $F(t)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на $[a,b]$, если $f(x)$ является производной функции $F(x)$ в любой точке $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 2. *Неопределенным интегралом* функции $f(x)$ на $[a,b]$, называется множество всех её первообразных, т.е. $\{F(x)+C\}$.

Обозначается неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ - называется *подынтегральным выражением,* x - *переменной интегрирования*.

§ 2. Таблица неопределенных интегралов. Основные свойства неопределенного интеграла

Действие, состоящее в нахождении неопределенного интеграла от данной функции, называется *интегрированием*.

Проинтегрировать функцию, или, как говорят часто взять от нее интеграл, в самых легких случаях можно простым обращением подходящей формулы дифференцирования. Приведем здесь формулы интегрирования, получающиеся обращением основных формул дифференциального исчисления.

1 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$.

5. $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$.

6. $\int \sin kx\; dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

10. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} arcctg\,\frac{x}{a} + C \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C. \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $\int dF(x) = F(x) + c$.

3. Однородность неопределенного интеграла:

Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

4. Аддитивность неопределенного интеграла.

Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций: $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

5. Линейность неопределенного интеграла:

Аддитивность и однородность вместе называются линейностью неопределенного интеграла:

$$\int [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)]dx = k_1 \int f_1(x)dx \pm k_2 \int f_2(x)dx .$$

§ 3. Основные методы интегрирования.

Рассмотрим основные методы интегрирования:

а) Метод непосредственного интегрирования.

Под непосредственным интегрированием разумеется такой способ интегрирования, при котором данный интеграл удается привести к одному или нескольким табличным интегралам при помощи применения основных свойств неопределенного интеграла, указанных в предыдущем параграфе и при помощи элементарных тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример1. Вычислить:

$\int\left(x^3+2x^2-7x+2\right)dx=\left\langle \begin{matrix} применяем \\ свойство 5. \end{matrix}\right\rangle=\int x^3dx+2\int x^2dx-7\int xdx+2\int dx=\langle$ применяем формулу $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$ $\rangle=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+C.$

Пример 2. Вычислить:

$\int\left(\sqrt{x}+2\cos 3x+e^{2x}\right)dx=\left\langle \begin{matrix} применяем \\ свойство 5 \end{matrix}\right\rangle=\int\sqrt{x}dx+2\int\cos 3xdx+\int e^{2x}dx=\langle$ применяем формулы $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C,$ $\int\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx+C,$ $\int e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}+C$ $\rangle=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$

б) метод введения нового аргумента.

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее,

т.е. если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то и $\int f(u)du=F(u)+C,$

где $u=\varphi(x)$– любая дифференцируемая функция от х.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int 2xe^{x^2}dx$.

Заметим, что $2xdx = d(x^2)$. Тогда интеграл $\int 2xe^{x^2}dx$ перепишем в виде $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2)$. Считая x^2 за новый аргумент $u = x^2$, данный интеграл мы свели к табличному интегралу $\int e^{x^2}d(x^2) = \langle x^2 = u \rangle = \int e^u du = e^u + C$.

Значит $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$.

Заметим, что $\frac{1}{1+x^2}dx = d(arctgx)$.Тогда наш интеграл перепишем в виде:

$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \int arctg^2 xd(arctgx)$. Считая $arctgx$ за новый аргумент $u = arctgx$, данный интеграл мы свели к табличному интегралу

$$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \int (arctgx)^2 d(arctgx) = \langle arctgx = u \rangle = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C.$$

Окончательно получим $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}arctg^3 x + C.$

в) Метод разложения.

Метод разложения заключается в том, что данную функцию мы разлагаем на сумму двух или более простых функций, которые можно легко интегрировать.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Разлагаем подынтегральную функцию на сумму двух более простых функций:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, \text{ где } f_1(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x+2}.$$

Тогда $\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+1| - \ln|x+2| = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Подынтегральную функцию мы можем представить следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}\text{, где } f_1(x) = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} \text{ и } f_2(x) = \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

г) Метод подстановки (метод замены переменных)

Метод подстановки заключается в следующем: полагая в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$, $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Чтобы, вычислить такой интеграл делаем подстановку:

$x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ $\quad -1 \le x \le 1$ $\quad t = \arcsin x$, $t : [-1,1] \to \left[-\pi/2, \pi/2\right]$.

Тогда $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int |\cos t| \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2t + C$.

Итак, окончательно получим $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

Делаем подстановку: $\quad x = t^2$, $dx = 2tdt$, $t = \sqrt{x}$.

Тогда $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C$.

Окончательно получим: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2arctg\sqrt{x} + C$.

д) Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям получается из обращения формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции от x. Имеем $d(uv) = udv + vdu$, откуда $udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu, \text{ или } \int udv = uv - \int vdu.$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух множителей u и dv (последние обязательно содержит dx).

Назовем «условно» функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ – прямыми функциями, а функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ – обратными.

Основные правила выбора функций u и v.

Основной трудностью при вычислении интегралов данным методом является правильный выбор u и dv. Поэтому рассмотрим некоторые правила выбора u и dv:

1. Если подынтегральная функция содержит одну из обратных функций, то в качестве u выбираем эту обратную функцию, а все остальное – дифференциал $v(dv)$.
2. Если подынтегральная функция является произведением прямой функции на алгебраический полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, то за u выбираем этот полином, а все остальное – дифференциал $v(dv)$.
3. Если подынтегральная функция имеет вид $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$, то интеграл обозначаем через $I = \int f(x)dx$, а затем, применяя метод интегрирования по частям дважды мы получаем линейное уравнение относительно I:

$I=\int f(x)dx=..........=aI+\varphi(x)$, где I - неизвестное. Оттуда I легко находится: $I=\dfrac{1}{1-a}\varphi(x)$.

Пример 1. Вычислить $\int xe^x dx$.

Примем $e^x dx$ за dv, а x за u, т.е. положим:

$$\left.\begin{array}{l} e^x dx = dv \\ x = u \end{array}\right\} \text{ откуда } \left\{\begin{array}{l} v=\int e^x dx = e^x, \\ du = dx. \end{array}\right.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1)+C.$$

Пример 2. Вычислить $\int e^x \cos x dx$.

Положим $\left.\begin{array}{l} e^x dx = dv, \\ \cos x = u, \end{array}\right\}$ откуда $\left\{\begin{array}{l} v = e^x, \\ du = -\sin x dx. \end{array}\right.$

Тогда $\int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$.

К интегралу в правой части снова применяем интегрирований по частям.

Примем $\left.\begin{array}{l} e^x dx = dv, \\ \sin x = u, \end{array}\right\}$ откуда $\left\{\begin{array}{l} v = e^x. \\ du = \cos x dx \end{array}\right.$

Тогда получим

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Перенося интеграл из правой части в левую, получим

$$2\int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) + C,$$

и, значит $\int e^x \cos x dx = \dfrac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$.

Глава II.

§ 4.Интегрирование простейших рациональных и иррациональных функций определенных видов.

В этом параграфе рассматриваются некоторые интегралы, содержащие квадратный трехчлен. Это интеграл типа:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Для успешного вычисления интегралов данного типа необходимы прочное знание таблицы интегралов и навыки в преобразовании квадратного трехчлена. Поэтому сначала рассмотрим преобразований квадратного трехчлена.

Квадратным трехчленом называется выражение вида ax^2+bx+c при $a \neq 0$. Если $a=1$, то квадратный трехчлен называется *приведенным*. Для дальнейшего необходимо вспомнить операцию, которая называется выделением полного квадрата из квадратного трехчлена. Пусть дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c. Тогда

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Интегралы данных типов с помощью выделения полного квадрата и метода подстановки (замены) сводятся к одному из следующих табличных интегралов вида

1. $\int \frac{du}{\sqrt{A^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{A}+C$; 2. $\int \frac{du}{u^2+A^2} = \frac{1}{A} arctg\frac{u}{A}+C$,

3. $\int \frac{du}{u^2-A^2} = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{u-A}{u+A}\right|+C$; 4. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+K}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+K}\right|+C$.

Пример 1. Выделить полный квадрат в трехчленах

а) $3x^2+3x+1$; б) $1+4x-2x^2$

Решение.

а) $3x^2+3x+1=3\left(x^2+x+\frac{1}{3}\right)=3\left(x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right]=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

б) $1+4x-2x^2=-2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)=-2\left[\left(x^2-2x+1\right)-1-\frac{1}{2}\right]=-2\left[(x-1)^2-\frac{3}{2}\right]=3-2(x-1)^2$.

Задание. Выделить полный квадрат в выражениях:

а) x^2+3x; **б)** $5x^2-10x+7$; **в)** $-x^2+5x+1$.

Интегралы каждого типа мы рассмотрим отдельно.

1. Интегралы типа $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Обозначим рассматриваемый интеграл буквой I_1. Выделив в квадратном трехчлене полный квадрат, получим.

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Заметим, что выражение b^2-4ac есть дискриминант квадратного трехчлена. В зависимости от его величины и знака могут представиться три случая.

Первый случай: $b^2-4ac\rangle 0$**.**

Тогда в знаменателе нашего интеграла получим разность, и $I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2 4ac}{4a^2}}$ является интегралом типа $\int\frac{du}{u^2-A^2}$, где в качестве A^2 имеем $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Согласно формуле (3) после интегрирования получим логарифм дроби.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+6x-4}$.

Имеем $\int \frac{dx}{x^2+6x-4} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9-13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln\left|\frac{x+3-\sqrt{13}}{x+3+\sqrt{13}}\right| + C$.

Второй случай: $b^2-4ac\langle 0$ (или $4ac-b^2\rangle 0$.

В знаменателе нашего интеграла I_1 получим теперь сумму. Действительно,

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Тогда I_1 является интегралом типа $\int \frac{du}{u^2+A^2}$, где A^2 есть число $\frac{4ac-b^2}{4a^2}\rangle 0$. По формуле (2) после интегрирования получим арктангенс.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{4x^2+2x+1}$.

Имеем

$$\int \frac{dx}{4x^2+2x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}} arctg \frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{4x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(заметим, что если коэффициент при x^2 является точным квадратом натурального числа, то можно не выносить его за знак интеграла).

Третий случай: $b^2-4ac=0$.

Тогда $I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{1}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{2a}} + C$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{4x^2+6x+\frac{9}{4}}$.

Имеем $\int \frac{dx}{4x^2+6x+\frac{9}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)} + C$.

Задание. Вычислить интегралы

1. $\int \frac{dt}{3t^2-4t+\frac{13}{3}}$; 2. $\int \frac{dx}{16x^2+8x-7}$.

2. Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

При интегрировании выражения $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ применяется тот же прием, что и в пункте 1 данного параграфа, с той лишь разницей, что если $a\langle 0$, то a нельзя вынести из-под корня.

Поэтому рассмотрим отдельно случаи $a\rangle 0$ и $a\langle 0$.

Первый случай: $a\rangle 0$.

Обозначим искомый интеграл через I_2. Тогда

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}}.$$

1. Если $b^2-4ac=0$, то

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{x+\frac{b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| + C$$

как интеграл типа $\int \frac{du}{u}$.

2. Если $b^2-4ac\neq 0$, то I_2 - интеграл типа $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+k}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|+C$, где

$k=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ есть число положительное или отрицательное (безразлично).

Таким образом, при $a\rangle 0$ в результате интегрирования получаем только логарифмическую функцию.

Второй случай: $a\langle 0$**.**

Заметим, что в этом случае $-a\rangle 0$. Тогда можно записать

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

1. Если $b^2-4ac\leq 0$, получим мнимый интеграл, так как подкоренное выражение отрицательно.

2. Если $b^2-4ac\rangle 0$, приходим к интегралу типа $\int\frac{du}{\sqrt{A^2-u^2}}$, где $A^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

который дает арксинус по формуле (1).

Пример 1. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{7+4x-3x^2}}$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7+4x-3x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{3}-\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-2}{5}+C.$$

Задание. Вычислить интегралы

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+7}}$; 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}}$; 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+bx+c}}$.

3. Интеграл типа $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$.

Обозначим рассматриваемый интеграл буквой I_3.

Интеграл типа $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ берется сразу в том частном случае, когда числитель есть производная знаменателя, то есть $Mx+N=2ax+b$.

Например, $\int \frac{12x+2}{6x^2+2x-1}dx=\ln\left|6x^2+2x-1\right|+C$ как интеграл типа $\int \frac{du}{u}$.

В общем случае с помощью соответствующего подбора коэффициентов дробь $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ можно представить как сумму двух дробей, у одной из которых в числителе будет стоять точная производная знаменателя $2ax+b$. Рассмотрим этот прием в общем виде:

$$I_3=\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{Mx}{ax^2+bx+c}dx+N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=M\frac{1}{2a}\int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx+$$
$$+N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}+N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+$$
$$+\left(N-\frac{M}{2a}b\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Первый интеграл относится к типу $\int \frac{du}{u}$ и дает логарифм знаменателя $\left(\ln\left|ax^2+bx+c\right|\right)$, второй – интеграл I_1, который преобразуется к табличному (арктангенс, логарифм дроби, степень с показателем -1) выделением полного квадрата в знаменателе.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{xdx}{3x^2+2x-5}$.

Заметим, что $\left(3x^2+2x-5\right)'=6x+2$. Тогда преобразуем

$$\int \frac{xdx}{3x^2+2x-5} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2x-5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+2-2}{3x^2+2x-5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x-5}dx -$$

$$-\frac{1}{6}\cdot 2\int \frac{dx}{3x^2+2x-5} = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x-5\right| - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x-5\right| - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}} = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x-5\right| - \frac{1}{9}\frac{1}{\frac{4}{3}\cdot 2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{x+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x-5\right| - \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-3}{3x+5}\right| + C.$$

Итак, при интегрировании дроби $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ в общем случае получаем два слагаемых: первое есть обязательно натуральный логарифм квадратного трехчлена, а второе – одна из функций вида $\frac{1}{u}$, $\ln\left|\frac{u-A}{u+A}\right|$ или $arctg\,\frac{u}{A}$.

Задание. Вычислить интегралы

1. $\int \frac{2x+5}{4x^2+2x+\frac{1}{4}}dx$; 2. $\int \frac{2x+1}{5x^2+6x+7}dx$; 3. $\int \frac{6x+2}{1+3x-9x^2}dx$

4. Интегралы типа $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

При интегрировании дроби $\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ применяется, как и пункте 3, разложение дроби на две дроби так, чтобы числитель первой являлся точной производной квадратного трехчлена (то есть подкоренного выражения). Но интегралы получим другие, так как квадратный трехчлен содержится здесь под корнем. Теперь будем пользоваться интегралами:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \quad \int \frac{du}{\sqrt{A^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{A} + C, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right| + C.$$

Пример 1. Вычислить $\int \frac{y+3}{\sqrt{2y^2+4y-5}}dy$.

Найдем производную подкоренного выражения: $\left(2y^2+4y-5\right)'=4y+4$.

Разобьем интеграл на сумму двух интегралов так, чтобы в числителе первого получить $4y+4$:

$$\int \frac{y+3}{\sqrt{2y^2+4y-5}}dy=\frac{1}{4}\int \frac{(4y+4)-4}{\sqrt{2y^2+4y-5}}dy+3\int \frac{dy}{\sqrt{2\left(y^2+2y+1-1-\frac{5}{2}\right)}}=\frac{1}{4}\int \frac{4y+4}{\sqrt{2y^2+4y-5}}dy+$$

$$+(3-1)\int \frac{dy}{\sqrt{2}\sqrt{(y+1)^2-\frac{7}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2y^2+4y-5}+\sqrt{2}\ln\left|y+1+\sqrt{y^2+2y-\frac{5}{2}}\right|+C.$$

Задание: Вычислить интегралы.

1. $\int \frac{(1-6x)dx}{\sqrt{21-12x-9x^2}}$; **2.** $\int \frac{3x+1}{\sqrt{13+12x-x^2}}dx$.

§5. Интегрирование рациональных и иррациональных функций.

Важнейшим классом элементарных функций, интегралы от которых находятся при помощи достаточно простой последовательности действий, является класс рациональных функций. Всякая рациональная функция может быть представлена в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень m многочлена, $P(x)$ ниже степени n многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Прежде всего, заметим, что если степень m числителя $P(x)$ больше или равна степени n знаменателя $Q(x)$ то, разделив многочлен $P(x)$ на многочлен, $Q(x)$ мы получим в частном некоторый многочлен $N(x)$ и в остатке многочлен $P_1(x)$ не выше $(n-1)-й$ степени. Следовательно

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Интегрирование многочлена $N(x)$ не доставляет никаких затруднений, и значит, весь вопрос заключается в интегрировании дроби, степень числителя которой меньше степени знаменателя.

1. Разложение на простейшие дроби.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^m}$, где m - целое число, большее единицы.

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}-q\langle 0$, то есть квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Мы предполагаем, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют действительные коэффициенты, причем коэффициент многочлена $Q(x)$ при x^n равен 1 (это всегда можно достигнуть делением числителя и знаменателя на коэффициент при x^n).

Многочлен $Q(x)$ – знаменатель заданной подынтегральной рациональной дроби – может быть представлен, как известно из алгебры в виде произведения линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot .... \cdot (x^2+px+q)^s, \qquad (1)$$

где a есть k - кратный действительный корень уравнения, $Q(x)=0$, а квадратное уравнение x^2+px+q имеет сопряженные комплексные корни (и значит, $p^2-4q\langle 0$), которые служат p- кратным сопряженными комплексными корнями уравнения $Q(x)=0$.

Интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ мы основываем на знании разложения (1) многочлена $Q(x)$ на действительные множители (или, что равносильно этому, на знании всех корней уравнения $Q(x)=0$). При этом оказывается, что дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы так называемых простейших дробей видов

$$\frac{A_i}{(x-a)^i},\ \frac{B_i x+C_i}{\left(x^2+px+q\right)^i},$$

где A_i, B_i, C_i - постоянные, а именно:

каждому множителю $(x-a)^k$ в представлении (1) знаменателя $Q(x)$ соответствует в разложении дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на слагаемые сумма k простейших дробей вида:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+..........+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a},$$

а каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^s$ соответствует сумма p простейших дробей вида

$$\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^S}+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{\left(x_2+px+q\right)^{S-1}}+....\frac{B_2 x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\frac{B_1 x+C_1}{x^2+px+q}.$$

Итак, интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби производится по следующей схеме:

1. Если дана непрерывная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, то есть представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $N(x)$ - многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot .... \cdot \left(x^2 + px + q\right)^S \cdot ..... ,$$

где $\frac{p^2}{4} - q \langle 0$, т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексно-сопряженные корни;

3. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_S x + C_S}{\left(x^2 + px + q\right)^S} + \frac{B_{S-1} x + C_{S-1}}{\left(x^2 + px + q\right)^{S-1}} + \cdots +$$
$$+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q}.$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты

$$A_1, A_2, ..., A_k, B_s, C_s, B_{s-1}, C_{s-1}, ..., B_1, C_1 .$$

Таким образом, интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших дробей.
Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x-3}{x^3 - x} dx$.

Решение. Разложение подынтегральной дроби на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{x-3}{x^3 - x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Прежде всего, нам нужно найти коэффициенты A, B, C. Освобождаясь, от знаменателей, получим:

$$x - 3 = A\left(x^2 - 1\right) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Так как это тождество, то коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны между собой, т.е. надо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ B - C = 1, \\ -A = -3. \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными находим:

$$A = 3, \quad B = -1, \quad C = -2.$$

Итак, тождественно $\dfrac{x-3}{x^3-x}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$, поэтому

$$\int\frac{x-3}{x^3-x}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{1}{x-1}dx-2\int\frac{1}{x+1}dx=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$.

Решение. Знаменатель легко раскладывается на множители:

$$x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^3-1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Разлагаем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1}=\frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Коэффициенты A, B, C, D находим из тождества

$$12=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Подставляя сюда четыре различных численных значения x, например: $x=1$, $x=-1, x=0$, $x=2$, получим систему

$$12=6B,\qquad 12=-A+B-D,$$

$$12=-2A,\qquad 12=7A+21B+6C+3D,$$

из которых, находим:

$$A=-6,\quad B=2,\quad C=4,\quad D=-4.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx=-6\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$.

Последний интеграл в правой части находим, выделяя в числителе производную знаменателя:

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C.$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx = -6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\ln(x^2+x+1) - 4\sqrt{3}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)^6} + 2\ln(x^2+x+1) - 4\sqrt{3}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование иррациональных функций.

Интегрирование иррациональных функций с помощью подходящей замены переменных сводится к интегрированию рациональных функций. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Вычислить интеграл. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$.

Решение. Делаем замену переменных $3x+2=u^3$.

Тогда $x=\frac{u^3-2}{3}$, $dx=u^2du$ и $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{3x+2}} = \int \frac{u^2}{\frac{u^3-2}{3}-u}du = \int \frac{3u^2}{u^3-3u-2}du$.

Последний интеграл находим известным методом интегрирования рациональных дробей. Находим:

$$\int \frac{3u^2}{u^3-3u-2}du = \int \frac{3u^2}{(u+1)^2(u-2)}du = -\int \frac{du}{(u+1)^2} + \frac{5}{3}\int \frac{du}{u+1} +$$

$$+\frac{4}{3}\int \frac{du}{u-2} = \frac{1}{u+1} + \frac{5}{3}\ln|u+1| + \frac{4}{3}\ln|u-2| + C,$$

и, возвращаясь к старой переменной, получим:

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x+2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+2}+1} + \frac{5}{3}\ln\left|\sqrt[3]{3x+2}+1\right| + \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[3]{3x+2}-2\right| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $x=t^4$. Тогда $\sqrt[4]{x}=t$, $\sqrt{x}=t^2$, $dx=4t^3dt$ и

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3} = \int \frac{4t^3dt}{(1+t)^3t^2} = \int \frac{4tdt}{(1+t)^3}.$$

Теперь разложим рациональную функцию $\frac{4t}{(1+t)^3}$ на простейшие дроби

$$\frac{4t}{(1+t)^3}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)^3}.$$

Найдем коэффициенты A, B, C. Приводя к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим:

$$4t=A(1+t)^2+B(1+t)+C$$

Так как это – тождество, то коэффициенты при одинаковых степенях t должны быть равны между собой:

$$0=A,\quad 4=2A+B,\quad 0=A+B+C.$$

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными находим:

$$A=0,\ B=4,\ C=-4.$$

Итак, тождественно имеем $\frac{4t}{(1+t)^3}=\frac{4}{(1+t)^2}-\frac{4}{(1+t)^3}$.

Тогда

$$\int\frac{4t}{(1+3)^3}dt=\int\frac{4}{(1+t)^2}dt-\int\frac{4}{(1+t)^3}dt=4\int\frac{1}{(1+t)^2}dt-4\int\frac{1}{(1+t)^3}dt=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C.$$

и, возвращаясь к старой переменной, получим:

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt{x}}=-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}+C.$$

§6. Интегрирование тригонометрических функций.

Интеграл

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

подстановкой $u=tg\frac{x}{2}$ преобразуется в интеграл от рациональной функции,

где $$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$,

где m и n - целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Интегрирование тригонометрических функций требует знание основных тригонометрических формул. Приведем некоторые тригонометрические формулы:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2.** $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; **3.** $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$;

4. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; **5.** $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$; **6.** $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

7. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; **8.** $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2}$;

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; **10.** $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;

11. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$;

12. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Полагая $u = tg\frac{x}{2}$, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Вычислим тот же интеграл другим способом, т.е. с помощью искусственных преобразований:

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \langle$ обозначим $\cos x$ через t; $\cos x = t$ и применяем формулу $\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \rangle = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C$.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}$.

Вычислим данный интеграл с помощью искусственных преобразований.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x \cos^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)} = \langle u = \sin x \rangle = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)}.$$

Остается найти интеграл от рациональной дроби

Получаем

$$\int \frac{du}{u^3(1-u^2)} = \int \frac{du}{u^3} + \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} - \frac{1}{2}\ln\int \frac{du}{1+u} = -\frac{1}{2u^2} + \ln\left|\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln|tgx| + C.$$

Глава III.

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$;
2. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3}\right) dx$;
3. $\int (1-x)(1-2x) dx$;
4. $\int \frac{dx}{x+a}$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;
6. $\int (2x-3)^{10} dx$,
7. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$;
8. $\int (x+1)^{3/2} dx$;
9. $\int 4^x dx$
10. $\int (2+3x)^{5/2} dx$;
11. $\int \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$;
12. $\int (x^3-1)^2 dx$;
13. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$;
14. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}} dx$;
15. $\int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) dx$;
16. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} dx$;
17. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$;
18. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$;
19. $\int (e^x + e^{-2x}) dx$;
20. $\int \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$;
21. $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$;
22. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;
23. $\int e^{2-3x} dx$;
24. $\int \frac{2}{e^{2x}} dx$;
25. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$;
26. $\int \left(\frac{1}{e^{3x}} + e^{-x}\right) dx$.
27. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$;

28. $\int (2^x+3^x)^2 dx$; 31. $\int \frac{dx}{\ln x}$; 34. $\int \frac{x^3}{3+x}dx$;

29. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$; 32. $\int \sqrt{2x^2+1}\cdot xdx$; 35. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx$;

30. $\int 2^{x+1}\cdot 3^{x-1}dx$; 33. $\int \frac{xdx}{x^2+3}$; 36. $\int \frac{2+x}{1-x}dx$.

Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

37. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\cdot dx$; 41. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 45. $\int \frac{\text{àrctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$;

38. $\int x^3(1-5x^2)dx$; 42. $\int \cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}dx$; 46. $\int \frac{\text{àrctg}x}{1+x^2}dx$;

39. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$; 43. $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

40. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$; 44. $\int \frac{\sin x\cdot\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$; 48. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

49. $\int \ln xdx$; 53. $\int x\cos xdx$; 57. $\int \text{arctg}xdx$;

50. $\int x\ln xdx$; 54. $\int x^2\sin 2xdx$; 58. $\int e^{2x}\cos 3xdx$

51. $\int xe^{-x}dx$ 55. $\int xshxdx$; 59. $\int e^{-x}\sin 2xdx$;

52. $\int x^2e^{-2x}dx$; 56. $\int x^3e^{-x^2}dx$; 60. $\int x\text{arctg}xdx$.

Найти интегралы:

61. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$; 65. $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$; 69. $\int \frac{4xdx}{x^2-3x+5}$;

62. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$; 66. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$; 70. $\int \frac{2x+1}{5x^2+6x+7}dx$;

63. $\int \frac{dx}{a+bx^2}$; 67. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$; 71. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$

64. $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$; 68. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$; 72. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$; 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$;

Найти интегралы от рациональных и иррациональных функций.

75. $\int \frac{5x^2+7}{x^3+2x^2+x}dx$; 80. $\int \frac{5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$; 85. $\int \frac{4\sqrt{x}}{5+\sqrt[4]{x}}dx$;

76. $\int \frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^4-x}dx$; 81. $\int \frac{x^2+7}{(x+1)(x^2+4)^2}dx$; 86. $\int \frac{2x}{\sqrt{x}(3-\sqrt[3]{x})}dx$;

77. $\int \frac{5x}{8x^3-1}dx$; 82. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$; 87. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x}dx$;

78. $\int \frac{x^6+1}{x^4-16}dx$; 83. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}}dx$; 88. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

79. $\int \frac{2x^2-3x}{(x-4)(x+6)}dx$; 84. $\int \frac{x^2+2\sqrt{2++x}}{\sqrt[3]{2+x}}dx$;

Типовой расчет по теме « Неопределенный интеграл».

I. Вычислить интегралы методом непосредственного интегрирования.

1. а) $\int\left(2x^4-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$, 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$, 3. а) $\int\left(\frac{a}{x}-\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$,

б) $\int tg^2 xdx$. б) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x}}dx$. б) $\int \frac{2^{x+1}-5^x}{10^x}dx$.

4. а) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$, 5. а) $\int \frac{dx}{3-4x^2}$, 6. а) $\int (2^x+3^x)^2 dx$,

б) $\int ctg^2 xdx$. б) $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx$ б) $\int \frac{5x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

7. а) $\int\left(\sqrt{5x}-\frac{3}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)dx$, 8. а) $\int\left(\frac{2+x}{2x}\right)^2 dx$, 9. а) $\int \frac{1+3x^2}{\sqrt{2\pi}}dx$,

б) $\int 4^x 3^{2x}dx$. б) $\int (1+2\sin x-3\cos 2x)dx$. б) $\int (3^{x+1}-4)^2 dx$.

10. а) $\int (2x^2+1)(x-3)dx$, 11. а) $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x^2})dx}{x}$, 12. а) $\int (2x-1)^3 dx$,

б) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. б) $\int \frac{dx}{7x^2+5}$. б) $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

13. а) $\int \frac{5^{x-1}+2\cdot 4^{x}}{2\cdot 10^{x}}dx$, 14. а) $\int \left(\frac{2+3x}{x^2}\right)^2 dx$, 15. а) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$,

б) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}dx$. б) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$. б) $\int \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^4}}dx$.

16. а) $\int \left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt[3]{3x}}{x^2}\right)^2 dx$, 17. а) $\int \left(e^{-2x}+\frac{2}{x}\right)dx$, 18. а) $\int \left(1+\frac{2}{x^3}\right)\sqrt{\sqrt{x}}dx$,

б) $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$. б) $\int \frac{x^2+4}{x^2-1}dx$. б) $\int \frac{dx}{3x^2-1}$.

19. а) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$, 20. а) $\int \frac{2x^2+3x-1}{\sqrt[3]{mx}}dx$, 21. а) $\int (1-3x)^3 dx$,

б) $\int \left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$. б) $\int \left(\frac{1}{3^x}+\frac{2}{5^x}\right)dx$. б) $\int 5^x\cdot 3^{2x+1}dx$.

22. а) $\int 2x\sqrt[3]{x^4+\frac{7}{x^3}}dx$, 23. а) $\int \left(\sqrt{7x}-\sqrt[3]{3x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$, 24. а) $\int \left(e^{3x-1}+\frac{1}{2^x}\right)dx$,

б) $\int \frac{x^2}{5-x^2}dx$. б) $\int \frac{2x^2}{3+4x^2}dx$. б) $\int \frac{xe^{3x}-5}{x}dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$, 26. а) $\int \left(2^{x-1}-3^{x+1}\right)dx$,

б) $\int (2-x)(3+x)\sqrt{x}dx$. б) $\int \frac{(1+2x)^2-(1-x)^2}{7x^3}dx$.

II. Вычислить интегралы методом введения нового аргумента.

1. а) $\int \frac{1-\ln(x+1)}{x+1}dx$, 2. а) $\int 2^{\cos x}\sin x\ dx$, 3. а) $\int \frac{2xdx}{1+4x^2}$,

б) $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$. б) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$. б) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$.

4. а) $\int 2^{1+\ln x}\frac{dx}{x}$, 5. а) $\int 3^{-x}xdx$, 6. а) $\int e^{\cos 2x+4}\sin 2xdx$,

б) $\int \frac{4x}{2+6x^2}dx$. б) $\int \frac{4x-1}{4x^2+9}dx$. б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

7. а) $\int \frac{x^3dx}{2x^8+2}$, 8. а) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}dx$, 9. а) $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$. б) $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}dx$. б) $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$.

10. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2 x}}$, 11. а) $\int \sqrt{x^3+1}x^2dx$, 12. а) $\int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$. б) $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$. б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

13. а) $\int \frac{arctgx}{3+3x^2}dx$, 14. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$, 15. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\cos x}}$,

б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$. б) $\int \sqrt{x^4+1}\ \ x^2dx$ б) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

16. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 xtg^4 x}$, 17. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\cos x}}$, 18. а) $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$,

б) $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3}$. б) $\int xe^{x^2+1}dx$. 19. б) $\int x\left(x^2+1\right)^{3/2}dx$.

19. а) $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax}dx$, 20. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$, 21. а) $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx$,

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. б) $\int \frac{e^x}{\left(7-e^x\right)^2}dx$. б) $\int e^x\sqrt[3]{4+e^x}dx$.

22. а) $\int \frac{x^3}{9-4x^2}dx$, 23 а) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$, 24. а) $\int x^3\sqrt[4]{5x^4-3}dx$,

б) $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. б) $\int x^2ctg^2\left(x^3-3\right)dx$. б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

25. а) $\int e^x\sqrt[3]{\left(4+e^x\right)^4}dx$, 26. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$,

б) $\int \frac{xdx}{a^2x^4-b^2}$. б) $\int \frac{x^2-2x+5}{x^2-4}dx$.

III. Вычислить интегралы методом подстановки.

1. а) $\int x\sqrt{x-5}dx$ 2. а) $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}dx$, 3. а) $\int (2x+1)^{20}dx$,

б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$. б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$. б) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

4. а) $\int \sin(a+bx)dx$ 5. а) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$, 6. а) $\int \frac{xdx}{9+8x-x^2}$,

б) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$. б) $\int \frac{dx}{x^2-x}$. б) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

7. а) $\int \frac{2x-3}{x^2+6x-16}dx$, 8. а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, 9. а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}dx$,

б) $\int \frac{2xdx}{5\sqrt{5x^2-2x+1}}$. б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$. б) $\int \frac{x}{(3-x)^7}dx$.

10. а) $\int x(5x-1)^{19}dx$, 11. а) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$, 12. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

б) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x+1}+1}dx$. б) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$. б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

13. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$, 14. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, 15. а) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$,

б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. б) $\int \frac{8dx}{x^2-6x+25}$. б) $\int x\sqrt{2-5x}dx$.

16. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 17. а) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{2x^2+x-3}}dx$, 18. а) $\int \frac{16x+2}{12x^2-4x+4}dx$,

б) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x-16}dx$ б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$. б) $\int \frac{4x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx$.

19. а) $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, 20. а) $\int \sqrt{4-4x^2}dx$, 21. а) $\int \frac{dx}{(2x+3)^4}$,

б) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$. б) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$. б) $\int \frac{x+1}{5x^2+3x-2}dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, 23. а) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$, 24. а) $\int \frac{2}{\sqrt{3+4x-6x^2}}dx$,

б) $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$. б) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-2x^2}}dx$. б) $\int \frac{(3\ln x+4)^3}{5x}dx$.

25. а) $\int x^3\sqrt[3]{1-3}dx$, 26. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-4}}$,

б) $\int \frac{4x}{-x^2+10x+9}dx$ б) $\int \frac{dx}{2e^{3x}-1}$.

IV. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1. а) $\int 3\sin\sqrt{4x}dx$, 2. а) $\int e^x\cos 2xdx$, 3. а) $\int 3xe^{2x}dx$,

б) $\int \operatorname{arctg} xdx$. б) $\int \ln xdx$. б) $\int \arcsin xdx$.

4. а) $\int \frac{\ln x}{2x^3}dx$,   5. а) $\int \ln^2 xdx$,   6. а) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$,

б) $\int x\cdot 2^{-x}dx$.   б) $\int x^2e^{-2x}dx$.   б) $\int \mathrm{arctg}xdx$.

7. а) $\int x^2\sin 2xdx$,   8. а) $\int \frac{\ln x}{3}dx$,   9. а) $\int \ln(1+x^2)dx$,

б) $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$.   б) $\int 3\cos\sqrt{3x}dx$.   б) $\int 2x\mathrm{arctg}xdx$.

10. а) $\int 3^x\cos 2xdx$,   11. а) $\int (x+2)e^{3x}dx$,   12. а) $\int x^2\cos\frac{2}{3}xdx$,

б) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.   б) $\int x\sin x\cos xdx$.   б) $\int e^x\ln(1+4e^{x)}dx$.

13. а) $\int x\cdot 3^{2x}dx$ 14. а) $\int x\ln(2x-5)dx$,   15. а) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$,

16. а) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$,   17. а) $\int x\ln(x^2+4)dx$,   18. а) $\int \frac{\arcsin 5x}{x^2}dx$,

б) $\int x\cdot\arcsin\frac{1}{x}dx$.   б) $\int \mathrm{arctg}3xdx$.   б) $\int x^2e^{5x}dx$.

19. а) $\int (x^2+6x+5)\mathrm{arctg}xdx$,   20. а) $\int e^{2x}\sin\frac{x}{2}dx$,   21. а) $\int (x^2+1)\sin 2xdx$

б) $\int \arccos 4xdx$.   б) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{3x}dx$.   б) $\int \ln(1+2x^2)dx$.

22. а) $\int x\mathrm{arctg}^2xdx$,   23. а) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$,   24. а) $\int e^{2x}\sin^2 3xdx$,

б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.   б) $\int (e^x-\cos x)^2dx$.   б) $\int \frac{\mathrm{arctg}e^x}{e^x}dx$.

25. а) $\int 3^x\cos 2xdx$,   26. а) $\int \sqrt[3]{2x^4}\ln xdx$,

б) $\int (2x+1)e^{3x}dx$.   б) $\int 4x^3e^{\frac{x}{3}}dx$.

V. Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

1. а) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$,   2. а) $\int \cos^4 x\sin^3 xdx$,   3. а) $\int \sin^3 xdx$,

б) $\int \cos^2 x\cdot\sin^3 xdx$.   б) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.   б) $\int \cos^4 3xdx$.

4. а) $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}$,   5. а) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$,   6. а) $\int \frac{\sin x\cos xdx}{(3+\cos x)^2}$,

б) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$. б) $\int \sin^4 x dx$. б) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx$.

7. а) $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$, 8. а) $\int \frac{dx}{\sin x + tgx}$, 9. а) $\int \sin 3x\cos 5x dx$,

б) $\int \sin 3x\cdot \sin x dx$. б) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. б) $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$.

10. а) $\int \sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{2x}{3}dx$, 11. а) $\int \sin^2 x\sin 3x dx$, 12. а) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$,

б) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. б) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. б) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

13. а) $\int \cos 4x\sin 2x dx$, 14. а) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$, 15. а) $\int \frac{\sin x + \cos x}{3+\sin 2x}dx$,

б) $\int \sin^6 x\cos^3 x dx$. б) $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1}dx$. б) $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$. 16.

16. а) $\int \sin^2 x\sin 4x dx$, 17. а) $\int 16\sin^4 x\cos^4 x dx$, 18. а) $\int \sin 10x\cdot\sin 15x dx$,

б) $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x}dx$. б) $\int \frac{1+ctgx}{1-ctgx}dx$. б) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

19. а) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}dx$, 20. а) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, 21.а) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$,

б) $\int \sin 7x\cdot\cos 3x dx$. б) $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$. б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.

22. а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x}dx$, 23. а) $\int \cos x\cos^2 2x dx$, 24. а) $\int \cos^4 3x dx$,

б) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$. б) $\int \cos\frac{4}{3}x\cdot\sin\frac{4}{3}x dx$. б) $\int \cos\frac{x}{5}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$, 26. а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}dx$,

б) $\int ctg^3 3x dx$. б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$.

VI. Найти интегралы от рациональных функций:

1. а) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$, 2. а) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$, 3. а) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$,

б) $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx$. б) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$. б) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

4. а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$,

б) $\int \frac{3x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$.

5. а) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$,

б) $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx$.

6. а) $\int \frac{2x}{8x^3-1}dx$,

б) $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5}dx$.

7. а) $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$,

б) $\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$.

8. а) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$,

б) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$.

9. а) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$,

б) $\int \frac{5dx}{(x+1)(2x^2+2x+5)}$.

10. а) $\int \frac{2x^5-2x^4+4}{x^4+4x^2}dx$,

б) $\int \frac{2x^2+4}{(x-4)(x+2)}dx$.

11. а) $\int \frac{2dx}{16x^4-1}$;

б) $\int \frac{x^2-4x-1}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx$.

12. а) $\int \frac{x^2-8x}{(x-5)(x+6)}dx$;

б) $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}dx$.

13. а) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$,

б) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$;

14. а) $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^3}dx$,

б) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$;

15.а) $\int \frac{dx}{x^3+8}$,

б) $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$;

16.а) $\int \frac{4x-3}{x(2x-3)^2}dx$,

б) $\int \frac{9x}{(x-5)(x^2+2x+10)}dx$.

17. а) $\int \frac{x^2+5}{2x^3-x^2}dx$,

б) $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$.

18. а) $\int \frac{dx}{(2x-1)(8x^2-4x+1)}$,

б) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$.

19. а) $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$,

б) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$.

20. а) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$,

б) $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx$.

21. а) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$,

б) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$.

22. а) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$,

б) $\int \frac{2x^4+1}{x^3+x^2+2x+2}dx$.

23. а) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$,

б) $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$.

24. а) $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4-5x^2+4}dx$,

б) $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$.

25. а) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$,

б) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$.

26. а) $\int \frac{x^5+3x^3+1}{x^2+x}dx$,

б) $\int \frac{3x^2-7}{(x+3)(2x^2-3x-2)}dx$.

VII. Найти интегралы от иррациональных функций:

1. а) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

2. а) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$, б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$, б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$. б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$.

5. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

6. а) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ б) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

8. а) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

9. а) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$, б) $\int \frac{3-4x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}dx$.

10.а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$, б) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^3}dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}$, б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$.

12. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$.

13. а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

14. а) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

15. а) $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}dx$, б) $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x+1)^2}dx$.

16. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$.

17. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

18. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$.

19. а) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

20. а) $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$

21. а) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$, б) $\int \frac{\sqrt{2x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$,

23. а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$,

24. а) $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$,

б) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.   б) $\int \frac{\sqrt[3]{2+2x}}{x}\,dx$.   б) $\int \frac{\sqrt[6]{5x}}{2+\sqrt[3]{8x}}\,dx$.

25. а) $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$,   26. а) $\int \frac{2x}{1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$,

б) $\int \frac{\sqrt{4x+20}}{2+\sqrt[3]{8x+40}}\,dx$.   б) $\int \frac{5x+\sqrt{4x+4}}{\sqrt[3]{8x+8}}\,dx$.

Литература

1. Назаров А.И. Курс математика для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.-576 с.
2. Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.-240 с.
3. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Письменный Д.Т., М, Айрис Пресс, 2006.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1.2. М., Интеграл-Пресс, 2005.

Методические указания

и задания для типового расчёта

по теме:

«Неопределенный интеграл»

Алиева Х.Р., Шамов Э.Ш.

Компьютерная верстка Гаджиев Г.К.
Подписано в печать. Формат 60*84/16
Гарнитура Times. Печать оперативная. Бумага потребительская.
Усл.печ.л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии Махачкалинского филиала МАДИ
367026, Махачкала, пр. Шамиля, 1