ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**МАХАЧКАЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКОГО АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Кафедра Математики и Информатики

Курбанов К.О.

Некоторые прикладные задачи по высшей математике

(методическое пособие)

Махачкала 2011

УДК 517.3
Некоторые прикладные задачи по высшей математике
(методическое пособие). Махачкала
Махачкалинский филиал МАДГТУ, 2011 г. –24стр.

Методическое пособие предназначено в основном студентам специальностей 270205(Автомобильные дороги и аэродромы) и 270201(Мосты и транспортные тоннели). Приведено достаточно много прикладных задач по математике. Часть сложных задач дана с указаниями или подробными решениями. К остальным задачам прилагаются ответы.

Пособие может быть использовано для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Рекомендуется студентам дорожных и других специальностей очной и заочной видов обучения.

Составитель:
к. ф-м. н., проф., зав. каф. «Математика и Информатика»
МФ МАДИ (ГТУ) Курбанов К.О.

Рецензенты:
к.т.н., проф., зав. каф. «Мости и Транспортные Тоннели»
МФ МАДИ (ГТУ) Аюбов Г. А.
к.ф-м.н., доцент, зав.каф. Высшей математики ДГТУ Нурмагомедов А.М.

Печатается согласно постановления Ученого совета
Махачкалинского филиала МФ МАДИ (ГТУ) от 27 марта 20101г.

Введение

Как известно, задачи прикладного характера играют важную роль в подготовке инженера; они оживляют учебный процесс и вызывают интерес к углубленному изучению математики. В задачниках по общему курсу математики задач прикладного характера бывает недостаточно. Данное пособие представляет собою попытку несколько восполнить этот пробел. Содержание задач в основном соответствует программе втузов для дорожных специальностей. Некоторые задачи затрагивают и другие отрасли практических знаний, с которыми будущий инженер может столкнуться в своей практической деятельности. В целях облегчения самостоятельного решения, задачи повышенной трудности снабжены указаниями, а в отдельных случаях – и полными решениями.

Задачи:

1. Канат подвесного моста имеет форму параболы (рис.). Составить ее уравнение относительно указанных на чертеже осей, если прогиб каната $OA=a$, длина прогиба $BC=2в$.

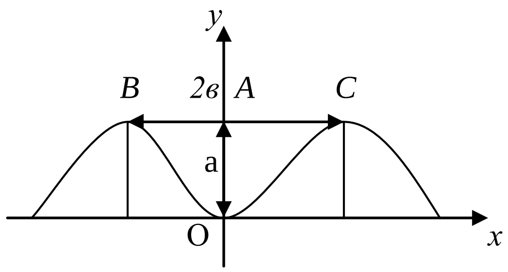


Рис.

2. Стальной трос подвешен за два конца. Точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно *20м*. Величина его прогиба на расстоянии *2м* от точки крепления, считая по горизонтали, равна *14,4см*. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, считая, что трос имеет форму дуги параболы.

3. Скорость точки меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 + at$. Какой путь пройдет это точка за промежуток времени [o,T]?

4. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты *4м* на расстоянии *0,5м* от вертикали, проходящей через точку *O* выхода струи (рис.) Найти высоту струи над горизонталью на расстоянии *0,75м* от точки *O*.

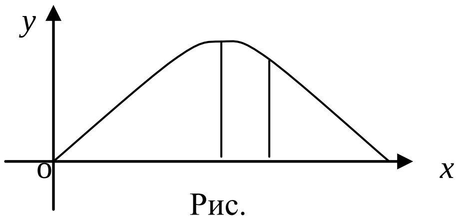


Рис.

5. Между пунктами *A* и *B* проходит шоссейная дорога. На плане местности эти пункты имеют координаты *(2;4)* и *(16;0)* (размеры в км.). Завод *C* с координатами *(10;14)* в той же системе надо соединить кратчайшей дорогой с этим шоссе. Найти на шоссе точку вхождения в него дороги и длину дороги.

6. На железнодорожной линии *AB* в точках *A* и *B* расположены станции. Из точки *N*, в окрестности станции *B*, груз может доставляться на станцию А двояко: либо по шоссе до станции B, а оттуда по железной дороге в A, либо непосредственно по трассе в A. Определить геометрическое место точек, для которых первый способ выгоднее второго.

7. Профиль подъема шоссе имеет форму кривой $y = \dfrac{x}{1+x}$. Определить угол наклона подъема в его начале.

8. Цепь висячего моста располагается по дуге параболы $x^2 = 2py$. Пролет моста $AB = 2e = 50\text{м}$, стрела провеса $\mathrm{OC} = \mathrm{f} = 5\text{м}$. Определить угол провеса в точке A.

9. Шоссе проходит через речку (рис.). Мост имеет форму параболы $x^2 = 2py$. Каким нужно сделать уклон насыпки к мосту, чтобы переход с моста на уклон был плавный? Длина моста *е=20м,* стрела провеса *f=0,5м.*

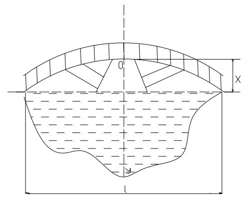


Рис.

10. Тело массы $m = 5\text{кг}$ движется по пути $s = t^2 + 2t + 3(\text{м})$. Найти импульс силы через *3* минуты после начала движения.

11. Два рельсовых пути пересекаются под углом 60^0. На одном пути находится поезд на расстоянии *8 км* от точки соединения путей, по направлению к которой он движется со скоростью *40км/ч*. На другом пути находится поезд на расстоянии *12км* от точки соединения путей и движется по направлению от нее со скоростью *10км/*ч. Найти скорость, с которой в этот момент сближаются или удаляются поезда друг от друга.

12. Вагон надземной железной дороги, проходящей на высоте *9м* над землей, в данный момент находится над идущим трамвайным вагоном. Пути их образуют прямой угол. Скорость первого вагона *12м/с*, второго - *6м/с*. С какой скоростью будет увеличиваться расстояние между вагонами через *6 сек*?

13. Конец *А* рельса *АВ* длиною *5м* поднимается с земли краном со скоростью *5м/с*. Другой конец волочится по земле. Какова скорость движения конца *В* в тот момент, когда конец *А* приподнялся на *2,8м*?

14. Изгибающий момент бруса, который характеризует его мощность, определяется формулой $M = E \cdot I \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2}$, где *Е*-модуль упругости, *I*-момент инерции сечения балки. Найти изгибающий момент *M(x)* бруса длиной *е*, один конец которого закреплен, а на другой находится груз весом *Р*. Уравнение изгиба бруса в этом случае:

$$y = \frac{P \cdot e^3}{2EI}\left(\frac{x}{e} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{e^3}\right).$$

15. Уравнение изогнутой оси балки имеет вид $y = \dfrac{Q}{6EI}(3ex^2 - x^3)$.

Определить: а) изгибающий момент $M(x)$;

б) перерывающее усилие $S(x)=\dfrac{dM(x)}{dx}$;

в) интенсивность нагрузки $q(x)=\dfrac{dS(x)}{dx}$.

16. Токопроводящий кабель состоит из медного провода с изоляцией. Если через x обозначить отношение радиуса медного провода к толщине изоляции, то скорость телеграфирования $\upsilon = Ax\cdot\ln\dfrac{1}{x}$. При каком x скорость будет наибольшей?

17. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости υ *км/ч* выражается следующими формулами:

а) на асфальте $f=14{,}5+0{,}25\cdot\upsilon$;

б) на дереве $f=18+0{,}25\cdot\upsilon$;

в) на хорошем шоссе $f=24-\dfrac{2}{3}\upsilon+\dfrac{1}{30}\upsilon^2$;

г) на плохом шоссе $f=28+0{,}25\cdot\upsilon+0{,}02\cdot\upsilon^2$;

д) на гранитной мостовой $f=17{,}5-\dfrac{1}{40}\upsilon^2$;

е) на булыжной мостовой $f=29-\dfrac{2}{3}\upsilon+\dfrac{1}{15}\upsilon^2$;

ж) на мягкой грунтовой дороге $f=36{,}5-\dfrac{3}{4}\upsilon+\dfrac{1}{30}\upsilon^2$.

I. Определить для тех случаев, где это возможно: а) скорость, при которой сопротивление должно быть наименьшим; б) величину этого наименьшего сопротивления.

II. При какой скорости сопротивление получается одинаковым как на плохом, так и на хорошем шоссе?

18. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии *1* мили. Корабль A идет на юг, делая *6* миль в час, и в настоящее время находится к западу от корабля B, который идет на запад со скоростью *7* миль в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

19. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобочную трапецию. Площадь его сечения ω. Определить гидравлически наивыгоднейшую форму сечения.

20. На расстоянии $AB=в$ от прямолинейной магистрали ON водопровода находится здание B. Точка A является проекций точки B на прямую MN, $OA=a$. От какого пункта P магистрали надо сделать прямолинейное ответвление PB, чтобы провести воду в здание B возможно дешевле, полагая, что стоимость единицы длины водопровода по направлениям OP и PB будет, соответственно, r_1 и r_2 рублей $(r_2> r_1)$?

21. Стоимость перевозки груза на расстоянии *1 км* по железнодорожной пути равна $к_1$ руб, по шоссе - $к_2$ руб ($к_1>к_1$). Завод построен в поселке C, не имеющем никаких подъездных путей. Ближайшее расстояние до железной дороги AM равно a *км*. Груз прибывает на станцию A. Под каким углом к железной дороге и на каком расстоянии от проекции B точки C на AM надо начать строительство шоссе, чтобы стоимость доставки груза на завод была наименьшей, если $AB=b$?

22. Автомобиль выезжает из пункта *A* в пункт *B* и движется со скоростью $\upsilon_1 = 80 км/ч$. В это же время поезд выходит из пункта *B* в пункт *C* и движется со скоростью *50 км/ч*. Угол *ABC* равен 60^0; *AB=200км*. В какое время расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим?

23. Два пункта P_1 *и* P_2 надо соединить железной дорогой; P_1 расположен на равнине, а P_2- на склоне горы, равномерно поднимающейся от прямой *m*, отделяющей равнину от горной местности. На равнине поезда могут ходить со средней скоростью υ_1, а на горе - со скоростью υ_2. Найти отношение косинусов углов α_1 *и* α_2 в точке *Q*- точке пересечения железнодорожного полотна, проходимого поездом в наикратчайшее время, с прямой m.

24. Выехав со станции, электровоз через *t* время часов имеет ускорение $a = 3t^2 - 42t + 80$ *(км/ч²)*. Найти скорость и расстояние, пройденное электровозом от станции через 1 час после выхода.

25. Река протекает по лугу, образуя кривую $y = x - 2x^2$, единица длины *-1км*, ось *OX* - линия шоссе. Сколько гектаров луга между шоссе и рекой?

26. Стальной мост имеет вид параболической арки. Пролет арки равен *29,9 м*; высота- *67 м*. Составить уравнение арки, приняв за ось *OX* касательную в вершине, а за ось *OY*-ось симметрии параболы.

27. В условиях задачи № 26 найти длину параболической арки стального моста.

28. Смотровые колодцы имеют форму усеченного конуса (рис.), узкая часть которых заканчивается люком. Это конус составляется из пяти бетонных колец одинаковой высоты. Размеры даны в миллиметрах. Найти: а) сколько кубических метров бетона приходится на каждое кольцо; б) сколько весит весь смотровой колодец (удельный вес бетона *2,45 т/м³*)?

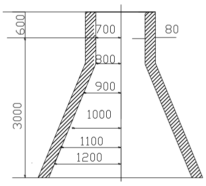


Рис.

29. Расстояние s, пролетаемое самолетом, определяется интегралом $\int_1^q \frac{\kappa}{x} dx$, где коэффициент *к* равен работе мотора (в *кг*) на *1 кг* горючего, *q*-отношение нагрузки в данный момент к первоначальной нагрузке. Определить s, если *к=4000, q=0,6.*

30. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать песчаную кучу конической формы с радиусом основания *R=1,2м* и высотой *H=1м,* если удельный вес песка $\delta = 2 г/см^3$ и берется он с поверхности земли?

31. Диаметр горизонтальной водопроводной трубы *1м*. Один конец ее соединен с резервуаром, в котором уровень воды на *30м* выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления воды на заслонку.

32. Найти давление Q колеса железнодорожного вагона на рельс, определяемое формулой $Q = \iint_D q d\upsilon$, где $q = \lambda z\left(1 - \frac{x^2}{2rz} - \frac{y^2}{2\rho z}\right)$; $\lambda, r, \rho\ z -$постоянные; при этом площадка смятия рельса проектируется на плоскость XOY в виде фигуры D, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{2rz} + \frac{y^2}{2\rho z} = 1.$

33. Мальчик бежал на коньках по льду со скоростью *15 км/ч*. Через $3\frac{2}{3}$ секунды он остановился, пробежав $8\frac{1}{15}$ *м*. Его скорость в момент времени t выражалась формулой $\upsilon = -9{,}8\mu t + \upsilon_0$, где υ_0-начальная скорость м/сек, а μ-коэффициент трения между коньками и поверхностью льда. Определить μ.

34. Нужно построить для моста каменный бык с круглыми горизонтальными сечениями и высотой *Н=12м*, на который, помимо его собственного веса, должна приходиться нагрузка $P=88229\cdot10^4$*н*. Плотность материала $\gamma=24525$ *н/м*^{3}. Допустимое давление составляет $88229x10^5$*н/м*. Какую форму должен иметь бык, чтобы на его изготовление пошло минимальное количество материала? Какова при этом будет площадь его нижнего основания?

35. Прямолинейное расстояние на местности измеряется с помощью мерной рейки длиною l м. Так как рейка практически прикладывается не точно вдоль измеряемой прямой, то результат измерения оказывается несколько больше истинной длины. Предложим, что рейка прикладывается зигзагом так, что ее концы отстоят от прямой поочередно то в одну, то в другую сторону на расстоянии λ м. Оценить погрешность. Как должно быть выражено отклонение λ, чтобы при измерении рейкой длины l=2м. относительная точность измерения была 0,1%?

36. Угол, измеренный теодолитом, оказался равным $22^0\ 20'30''\pm30''$. Какова относительная погрешность измерения?

37. Пункт *В* находится на расстоянии *60 км* от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта *А* до ближайшей к пункту *В* точки *С* составляет *285 км*. На каком расстоянии от точки *С* надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на продвижение между пунктами *А* и *В*, если скорость движения по железной дороге равна *52 км/ч*, а скорость движения по шоссе - *20 км/ч*?

38. Турист идет из пункта *А*, находящегося на шоссейной дороге, в пункт *В*, расположенный в *8км* от шоссе. Расстояние от *А* до *В* по прямой составляет *17км*. В какой месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт *В*, если скорость его по шоссе *5км/ч*, а по бездорожью *-3км/ч*?

39. Канал, ширина которого *27м*, под прямым углом впадает в другой канал шириною *64м*. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

40. Найти силу давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рис.). Плотность воды $\rho = 1000\,кг/м^3$.

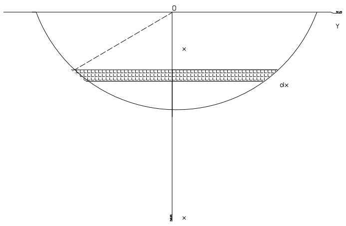


Рис.

41. Прямоугольный сосуд наполнен равными по объему количествами воды и масла. Масло вдвое легче воды. Показать, что сила давления на стенки сосуда уменьшится на *20%*, если сосуд наполнить одним маслом.

42. Результаты опытов по определению сопротивления, оказываемого воздухом движущемуся автомобилю, даны в таблице:

A	*46*	*38*	*34*	*32*	*28*	*24*	*22*	*18*	*16*	*12*
υ	*47,9*	*52,9*	*54*	*55,5*	*57,6*	*62,5*	*64,2*	*70,3*	*75*	*79*

где *A* – площадь испытывающей сопротивление лобовой поверхности автомобиля, а υ - скорость его в час. Установить между этими величинами зависимость вида $A = a\upsilon^2 + b\upsilon + c$.

43. Известна траектория движения точки: $16x^2 + 9y^2 = 400$. В какой точке проекции скорости имеют одинаковые величины с противоположными знаками?

44. Судно движется со скоростью *8км/ч* и бросает якорь. Глубина моря *1км*. Якорь достает дно, и цепь идет от него к судну по прямой. Как быстро скатывается цепь тогда, когда под водою её уже будет *2км*?

45. Дорога пересекает излучину реки в точках *A* и *B*. Для измерения площади земли, заключенной между берегом реки и дорогой, измерены расстояния от дороги до реки, начиная от точки *A*. Результаты измерений оказались равными: *3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 2,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24*. Определить искомую площадь по формуле Симпсона.

46. Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и длине его. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу *150м*, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра $\upsilon_0 = 12\, м/сек$; после прохождения в лесу пути $s = 1м$ скорость ветра уменьшалась до $v_1 = 11{,}8\ м/сек$.

47. Балка литого железа длиною $l = 80 см$, с квадратным сечением $6{,}6см^2$, лежит плотно на земляном грунте и несет посредине груз $P = 9810 н$. Определить давление балки на грунт на концах и в середине балки, если дано, что при удельном давлении в $981 н/см^2$ осадка грунта достигает *0,25мм*.

48. Закругление шоссе должно идти от *A* и *B* по дуге окружности, переходящей в точке *A* в прямую *AK* и в точке *B* – в прямую *BS*. Показать, что при таком отклонении от касательной абсциссу x точки P дуги радиуса r, соответствующую ординате y, можно выразить приближенно формулой $x = \frac{y^2}{2r} + \frac{y^4}{8r^3}$.

49. Выкопан котлован параболической формы с диаметром 80*м* и глубиной 10*м*. На каком расстоянии от нижней точки котлована по центру находятся фокус параболы?

50. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис.). При каких значениях a и h прочность балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2?

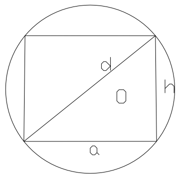


Рис.

51. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения $P = 20 + 5\pi (м)$. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

52. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2 (м/c)$. Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

53. Скорость движения точки $\upsilon = 0{,}1te^{-0{,}02 \cdot t} (м/c)$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки $(\upsilon(t_2) = 0)$.

54. Три пункта *A, B, C* не лежат на одной прямой, причем $\angle ABC = 60°$. Одновременно из точки *A* выходит автомобиль, а из точки *B* - поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью *80км/ч*, поезд – к *C* со скоростью *50км/ч*. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB=200 км?*

55. Тело массой *10кг* движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t + 4$ (путь-в метрах). Найти кинетическую энергию тела $(m\upsilon^2/2)$ через 4с после начала движения.

56. Открытый желоб в сечении имеет форму равнобедренной трапеции (рис.), основание и боковые стороны которой равны *a*. Чему равен угол наклона β стенка желоба к его высоте, проведенной из вершины тупого угла, при наибольшей пропускной способности желоба?

Рис.

57. При измерении прямоугольного поля нашли его длину *u=60м* и ширину $\upsilon = 23м$. Погрешность при измерении длины не превышает *0,3м*, а при измерении ширины - *0,2м*. Определить границы погрешности, которую мы допускаем, принимая площадь прямоугольника равной $60 \cdot 23 = 1380 м^2$, и относительную погрешность, допущенную при вычислении площади.

58. Точка движется прямолинейно с ускорением *a=6t – 12*. В момент времени t=0 (начало отсчета) начальная скорость $\upsilon_\circ = 9 м/с$; расстояние от начала отсчета $s_\circ = 10 м$. Найти:
а) скорость и закон движения точки; б) значения ускорения, скорости и пути в момент *t=2c;* *в*) момент, когда скорость является наименьшей.

59. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью $\upsilon = (3t^2 - 6t) м/с$, второе – со скоростью $\upsilon = (10t + 20) м/с$. В какой момент времени и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

60. Известна скорость движения материальной точки $\upsilon = (12t - 3t^2) м/с$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

61. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания *0,5м* и высотой *2м* заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

62. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $\upsilon = (6t^2 + 2t) м/с$, второе - со скоростью $\upsilon = (4t + 5) м/с$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через *5с*?

63.Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями *а* и *в (а > в)* и высотой *h.*

64. Если длина тяжелой нити (провода, цепи) (рис.) равна *2s*, полупролет – *l,* а стрелка провеса – *f* , то имеет место приближенное равенство

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

а) Подсчитать, какое изменение произойдет в длине нити при изменении ее стрелки провеса *f* на величину *df.*
б) Если учесть изменение длины провода ds (например, от изменения температуры или нагрузки), то как изменится при этом стрелка провеса?

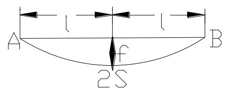


Рис.

65. Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью *50км/час*, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью *10км/час.* С какой скоростью они удаляются друг от друга? Как направлен вектор скорости?

66. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 м. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

67. Бревно длиной *20м* имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны, соответственно, *2м* и *1м*. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

68. Расход угля (т/час) паровым катером определяется экспериментально установленной формулой

$$z = 0{,}3 + 0{,}001\upsilon^3 \ \text{км/час},$$

где υ - скорость катера,. Найти наиболее экономичную скорость катера.

69. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

70. Указать наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок a и объемом V, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

71. Вычислить работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 2 \cdot 10^4 H$ с поверхности земли на высоту *h=1500 км.*

72. Водитель трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает на *1200Н* за каждую секунду. Найти уравнение движение трамвая, если вначале сила тяги была равна нулю. Сила тяжести вагона $P = 100kH$, сопротивление трения постоянно и равно *2000Н;* начальная скорость равна нулю; начало движения вагона не совпадает с момента выключения реостата.

73. Катер движется в спокойной воде со скоростью $\upsilon_0 = 20 км/ч$. Определить скорость катера через *2* минуты после выключения двигателя, если за $40с$ она уменьшилась до $\upsilon_1 = 8 км/ч$. Сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

74. Чугунный брус массой *14,6кг* имеет форму прямоугольного параллелепипеда размерами $5 \times 4 \times 100$*см*. Найти плотность чугуна.

75. Перпендикулярное сечение канала глубиной *5м* имеет форму трапеции с основаниями *8м* и *20м* (рис). Какое количество воды вмещает участок канала длиной *1км*?

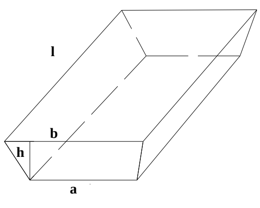


Рис.

76. В банку, диаметр основания которой *18см,* опущен камень, вследствие чего уровень воды в банке поднялся на *12,5см*. Найти объем камня.

77. Треугольная пластинка с основанием *0,3м* и высотой *0,6м* погружена вертикально в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку (рис).

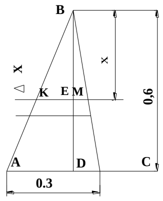


Рис.

78. Из чугунной заготовки (плотность чугуна $\rho = 7{,}2\,г/см^3$) массой $m = 1440$г отлит конус высотой *Н=30см*. Найти радиус *r* основания конуса.

79. Сколько олифы будет израсходовано на покраску цилиндрической колонны, радиус основания которой равен *0,8м*, а высота *5,5м*, если на покраску $1м^2$ расходуется *250г* олифы?

80. Стержень рычага разделен на сантиметры и миллиметры. В точках, соответствующих делениям *23,7см* и *74,3см*, подвешены грузы в *350г* и *475г*. Определить точку стержня, под которую надо подвести опору, чтобы рычаг находится в равновесии.

81. Горизонтальная балка длиной *3м* и весом *80кг* свободно лежит своим концами на двух неподвижных опорах *А* и *В* (рис.). На каком расстоянии от конца *А* нужно поместить груз в *200кг*, чтобы давление на опору *В* было равно *110кг*?

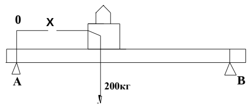


Рис.

82. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной *3м*, а высота равна *2м*, заполнен водой. Вычислить работу, которую, необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

83. Сжатие вертикальной балки пропорционально площади поперечного сечения. Какое поперечное сечение прямоугольной формы должна иметь балка, изготовленная из круглого бревна диаметром *d*, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим?

84. Для балки, лежащей на двух опорах с равномерно распределенной нагрузкой по всей длине *l,* момент изгиба балки в любой точке *А* определяется из равенства $M = \frac{1}{2}gl - \frac{1}{2}qx^2$, где *x*- расстояние точки *А* от одной из опор, а *q* – нагрузка на единицу длины балки. Докажите, что максимальный изгибающий момент находится в центре балки, и найдите его значение.

85. Эмпирически установлено, что расход горючего в зависимости от скорости движения автомобиля на каждые *100км* определяется по формуле $f(\upsilon) = 21 - 0{,}55\upsilon + 0{,}0066\upsilon^2$, где υ - скорость автомобиля в *км/ч*. Найдите наиболее экономичную скорость движения автомобиля.

86. Эмпирически установлено, что расход горючего автомобиля ГАЗ-69 в зависимости от скорости определяется формулой $f(\upsilon) = 18 - 0{,}3\upsilon + 0{,}003\upsilon^2$, где υ- скорость в *км/ч* и $f(\upsilon)$-расход горючего в литрах на *100км* пути. Найдите наиболее экономичную скорость движения автомобиля и расход горючего в литрах на *100км* пути при скорости автомобиля *100, 75* и *40 км/ч*.

87. Требуется покрасить *120* урн, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда без крышки; длина, ширина основание и высота соответственно равны *40, 30* и *50 см*. Сколько будет израсходовано краски, если на $1м^2$ расходуется *200г*, а производственное потери краски составляют *15* %?

88. Требуется сшить палатку, имеющую форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна *4,5м*, апофема - *7,5м*. Сколько метров полотна шириной *60см* нужно израсходовать, если расходы на швы и отдых составляют *8*%?

89. Надводная часть бакена имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна *1м*, а боковые ребра - *1,2м*. Сколько потребуется краски, чтобы дважды покрасить *120* бакенов, если на $1м^2$ расходуется *280г*?

90. Толщина кирпичной стены равна *30см*. Найдите зависимость температуры от расстояния точки до наружного края стены, если температура составляет 20^0 на внутренней и 0^0 на внешней поверхности стены. Найдите также количество теплоты $\left(на\ 1м^2\right)$, которое стена отдает наружу в течение суток. Коэффициент теплопроводности считать равным $0{,}0015\dfrac{Дж\cdot м}{град\cdot с}$.

91. Стены и пол подвала, имеющего вид полуцилиндра, длина которого равна *18м*, а диаметр–*17,4м*, требуется обработать противокоррозионным составом. Сколько килограммов этого состава нужно израсходовать, если на $1м^2$ расходуется *100г*?

92. Один квадратный метр поверхности нагрева парового отопления дает *825* тепловых единиц в час. Сколько погонных метров труб диаметром *34мм* потребуется для изготовления отопительной системы помещения, если расход тепла составляет *4500* тепловых единиц в час?

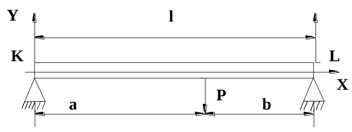
93. Производительность труда рабочих цеха в течение смены описывается эмпирической формулой $P(x) = -2{,}53x^2 + 20{,}24x + 111{,}1\ (0 < x < 7)$, где x – рабочее время в часах. Вычислите скорость роста производительности труда при *x=2ч*. Найдите, в какой момент времени производительность труда окажется максимальной.

94. Требуется соединить русла двух рек в плоской области прямолинейным каналом наименьшим длины, если эти русла представляют собой параболу $y = \dfrac{2}{3}x^2$ и прямую

4x-3y-12=0.

95. Вдоль балки непрерывно распределена нагрузка *p*. Нагрузка, приходящаяся на участок балки от ее начала до точки с абсциссой *x*, будет функцией от *x*: $p = p(x)$. *О*пределить среднюю интенсивность нагрузки для участка Δx и интенсивность нагрузки в точке *x*. Какова будет интенсивность нагрузки при равномерном распределении ее?

96. Балка подперта на концах *K* и *L* (рис.). В некоторой точке на расстоянии *a* от левого конца и *b* от правого



к ней приложена сосредоточенная нагрузка *P*. Тогда изогнутая ось балки, при указанном на рисунке выборе осей, представляется двумя различными уравнениями:

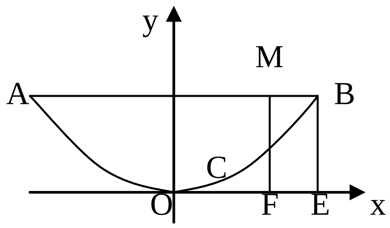
$$y = \frac{Pb}{6(a+b)EI}\left[x^3 - \left(a^2 + 2ab\right)x\right], \qquad 0 \le x \le a;$$

$$y = \frac{Pb}{6(a+b)EI}\left[x^3 - \left(a^2 + 2ab\right)x - \frac{(x-a)^3}{b}\right], \qquad a < x \le a+b,$$

где *E* - модуль упругости; *I* – момент инерции сечения балки относительно среднего слоя. Показать, что функция y непрерывна и имеет касательную в точке $x = a$.

Ответы, указания и решения:

1) $y=\frac{a}{b^2}\cdot x$. **2)** *AB=20м; EF=2м; CM=0,144м*; надо найти *BE*= y_0. Имеем *OE=10м*;



OE+OE-EF=8м. Тогда *C* имеет координаты*:* С $(8; y_0-0{,}144)$. Уравнение параболы ищем виде $y=p\cdot x^2\cdot(p>0-const)$.Точка С принадлежит параболе $\Rightarrow$уравнение параболы пример вид: $y=\frac{y_0-1{,}44}{64}x^2 \Rightarrow при\, x=10 \Rightarrow y_0=\frac{y_0-1{,}44}{64}\cdot 10 \Rightarrow y_0=0{,}4м=40см.$ Ответ: 40см.

3) $v_0\cdot T+\frac{aT^2}{2}$. **4)** *3м.* **5)** $x=\frac{358}{53}$; $y=\frac{140}{53}$; $L=12км$.

6) Обозначим $AB=l$, направим ось OX по AB, за начало координат примем точку O – середину отрезка *AB*. Тогда $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$; $B\left(\frac{t}{2},0\right)$. Пусть *p* и *q* – соответственно, тарифы перевозок по железной дороге и по трассе (стоимость в рублях провоза 1*т*. груза на расстояние 1*км*.), r (*руб*.) – стоимость погрузки и выгрузки 1*т*. груза на железнодорожной станции. Тогда стоимость провоза 1*т*. груза первым способом (по пути *NB* + *BA*) $s_1=NB\cdot q+AB\cdot p+r=NB\cdot q+tq+r$; вторым способом (по пути *NA*): $s_2=q\cdot NA$, $s_1-s_2=(NB-NA)q+tp+r$.

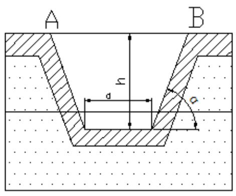
Если $s_1=s_2$, то $NA-NB=\frac{tp+r}{q}$ - постоянная, т.е. точка *N* лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a=\frac{r+tp}{2q}$; $b^2=\frac{t^2}{4}-a^2$. Искомое геометрическое место есть множество точек, лежащих внутри правой ветви гиперболы (содержащей точку *B*).

7) 45^0. **8)** $y=\frac{x^2}{2p}$; $p=62{,}5$; $tg\ a=-0{,}4$. **9)** Направление подхода должно продолжать направление касательной к профилю моста на конце его, $y'=0{,}1$.

10) $v=\frac{ds}{dt}=2t+2$; $v_0=2м/сек$; $v|_{t=2}=6м/сек$; $F\cdot t=mv-mv_0$; $F\cdot t=20\ кгм/сек$. **11)** Пусть *O* - точка пересечения путей, *A* и *B* – соответственно точки, в которых находятся поезда. Обозначим *OA=x, OB=y, AB=z;* тогда $z^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^0$, $2z\frac{dz}{dt}=(2x-y)\frac{dx}{dt}+(2y-x)\frac{dy}{dt}$. При *x=8, y=12,* $\frac{dx}{dt}=-40$; $\frac{dy}{dt}=10$; $\frac{dz}{dt}=0$, т. е. в данный момент времени поезда не сближаются и не удаляются друг от друга. **12)** $3\frac{1}{3}м/сек$. **13)** Конец *AC =5t;* $x=\sqrt{500^2-25t^2}$; $\frac{dx}{dt}=-3{,}4см/сек$, где *x(t)* - расстояние от конца *B* до точки *C*, над которой находится кран; *t*- время, протекшее от начала подъема конца *A*. **14)** $M=-P_x$. **15)** $M=Q(t-x)$; $S=-Q$; $q=0$;

16) $x = e^{-0,5}$. **17)** I. а) и б) - функция линейная, экстремума нет; *в)* $v = 10$; $f\ \min = 20\frac{2}{3}$ *г)* $v = 6,25$; $f\ \min = 27\frac{7}{32}$; *д)* Минимума нет ; *е)* $v = 5$; $f\ \min = 27\frac{1}{3}$; *ж)* $v = 11,25$; $f\ \min = 32\frac{9}{32}$. II. $v = 38,9$. **18)** Нет, т.к. наименьшее расстояние между кораблями *3, 25* мили будет через *25* минут. **19)** Гидравлически наивыгоднейшей формой сечения будет такая форма, при которой смоченный периметр – наименьший, а глубина h – наибольшая. *AB= d+2hctg a;*

ω=(d+h ctg α)h; d=$\frac{\omega}{h} - hctg\alpha$; u=$\frac{\omega}{h} + \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}h$. Сечение – половина правильного



шестиугольника, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

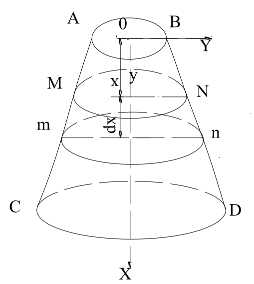
20) $x = a - \frac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$. **21)** $a = \arccos\frac{k_1}{k_2}$, $a\ tga$. **22)** $e = 1,9$ *ч.* **23)** $\frac{\cos\ a_1}{\cos\ a_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

24) $v = 60\ км/ч$; $S = 33,25\ км.$ **25)** $P = 4\frac{1}{6}\ га.$ **26)** Уравнение параболы $x^2 = 3,2y$; уравнение директрисы $y = -0,4м.$ **27)** $\iota \approx 145,18м.$ **28)** *а) 0,238; 0,268; 0,298; 0,328; 0,358; б) 3,65т.* **29)** *2043,2 м.;* **30)** *A=7387 дж.* **31)** *23 550 кГ.*

32) Замена переменных: $x = \sqrt{2rz}\,t\cos\varphi$; $y = \sqrt{2\rho z}\,t\sin\varphi$; $d\sigma = 2zt\sqrt{\rho r}dtd\varphi$. Уравнение эллипса: $t^2 = 1$, *t=1.*

$$Q = \iint\limits_D qd\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 2\lambda z^2\sqrt{\rho r}\left(t - t^3\right)dt = \lambda z\frac{\pi ab}{2}, \quad где \quad a = \sqrt{2rz};$$

$b = \sqrt{2\rho z}$. **33)** $\mu = 0,11$; **34)** Вес элементарного слоя (рис.) равен γSdx, где S – площадь произвольного сечения, а вес единицы площади равен $\frac{\gamma Sdx}{dS} = k$. Нижнее основание $S_1 = 0,33м^2$. Уравнение BD будет $y = y_0 \cdot e^{yx/2k}$



35) При однократном прикладывании линейки абсолютная погрешность равна разности между длиной ι рейки и ее проекцией на измеряемую прямую $x = \frac{2\lambda^2}{\iota}$; $\delta = \frac{2\lambda^2}{\iota^2}$; $\lambda = 0,044$.

36) $2\sqrt{\left(\frac{\iota}{2}\right)^2-\lambda^2}\approx\iota-\frac{2\lambda^2}{\iota}$; $\delta=0{,}04\%$. **37)** *25км* ; *8ч.15 мин*. **38)** На расстоянии *9 км.* от *А*. **39)** *125м.* **40)** Дифференциал силы давления на элементарную площадку выразиться так: $dP=2\rho gx\sqrt{9-x^2}dx=19600x\sqrt{9-x^2}dx$. Отсюда $P=19600\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=-\frac{19600}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^3=176400H=176{,}4\ кH$. **41)** Пусть h – глубина сосуда, а a – длина стенки. Поскольку масло располагается над водой, то сила давления на верхнюю половину сосуда $P_м=\frac{1}{2}\mu_B\int_0^{h/2}axdx=\frac{ah^2\mu_B}{16}$. Сила давления на глубине x под плоскостью раздела слагается из столбца масла высотой *h/2* и столба воды высотой $(x-h/2)$: $P_B=\mu_B a\int_{h/2}^{h}\left(\frac{h}{4}+x-\frac{h}{2}\right)dx=\mu_B ah^2/4$. Если сосуд заполнен только маслом, то $P_1=\frac{1}{4}\mu_B h^2 a\cdot P=P_м+P_B=\frac{5}{16}\mu_B ah^2$. Разность $P-P_1=\frac{1}{16}\mu_B ah^2=\frac{1}{5}P$.

42) $A=0{,}025028\upsilon^2-4{,}07963\upsilon+181{,}05$. **43)** Вектор скорости должен быть параллелен прямой $y=-x$; $y'=-1$; $M_1\left(3;\frac{16}{3}\right)$; $M_2\left(-3;\frac{-16}{3}\right)$. **44)** Если l – длина цепи под водой, то $l=\sqrt{x^2+h^2}$. Тогда $\frac{dl}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$; $\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=4\ км/ч$. **45)** $P=210\ м^2$.

46) Пусть на расстояние *S* от начала леса скорость ветра υ. Тогда - $d\upsilon=k\upsilon dS$. Закон процесса: $\upsilon=\upsilon_0 e^{-kS}$. Используя условия задачи, найдем: $e^{-k}=0{,}983$; тогда скорость ветра, углубившегося на *150 м* в лес, $\upsilon=0{,}931\ м/сек$. **47)** Воспользуемся основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки: $\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{1}{EI}(ky+P)$. В данном случае коэффициенты $C_1=C_3=-0{,}0057$; $C_2=-0{,}0270$; $C_4=-0{,}0156$. Подставляя их в общее решение, найдем, что прогиб балки на концах в точках *K* и *N* ,соответственно, будет 0,043 и 0,058 *см*. Отсюда давление со стороны балки на грунт в этих точках равно 10104,3 *н/см* и 13635,9 *н/см*. **48)** Составить уравнение окружности; выразить *x* через у и разложить в биномиальный ряд. **49)** *40 м.* **50)** $a=d/\sqrt{3}$, $h=d\sqrt{2}/\sqrt{3}$. **51)** *5м.*

52) *150м.* **53)** *250м.* **54)** $1\frac{27}{43}ч$. **55)** Найдем скорость движения тела в момент времени *t*: $\upsilon=\frac{ds}{dt}=6t+1$. Вычислим скорость тела в момент *t=4;* $\upsilon(4)=6\cdot4+1=25(м/с)$. Определим кинетическую энергию тела в момент *t=4:* $m\upsilon^2/2=10\cdot25^2/2=3125(Дж)$. **56)** $\beta=\frac{\pi}{6}$.

57) Имеем $|du|<0{,}3,\quad |d\upsilon|<0{,}2$. При наихудших условиях $|du|=0{,}3,\quad |d\upsilon|=0{,}2$. Найдем абсолютную погрешность произведения:

$$d(u\upsilon)=\upsilon du+u\,d\upsilon=23\cdot0{,}3+60\cdot0{,}2=18{,}9\approx19\left(м^2\right)$$

Это наибольшая величина абсолютной погрешности, которую мы можем допустить, принимая площадь участка равной $1380м^2$. Округляя погрешность в сторону увеличения и принимая ее равной *20*$м^2$, найдем границы погрешности при вычислении площади. Таким образом, площадь не превосходит 1380+20=1400 ($м^2$) и не менее

1380-20=1360($м^2$). Относительную погрешность вычислим по формуле $\varepsilon(u\upsilon)=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{d\upsilon}{\upsilon}\right|$,

$$\varepsilon(u\upsilon)=\frac{0,3}{60}+\frac{0,2}{23}=\frac{1}{200}+\frac{2}{230}\approx 0,014=1,4\%.$$

Итак, относительная погрешность не превышает 1,4%. **58)** *а*) Находим скорость: $\frac{d\upsilon}{dt}=6t-12$, или $d\upsilon=(6t-12)dt$. Интегрируя, получим

$$\int d\upsilon=\int(6t-12)dt; \qquad \upsilon=3t^2-12t+C_1$$

Используя начальные условия *t=0*, $s_\circ=9$, имеем $9=3\cdot 0^2-12\cdot 0+C_1$, т.е. $C_1=9$.Следовательно, $\upsilon=3t^2-12t+9$.

Находим закон движения точки: $\frac{ds}{dt}=3t^2-12t+9$, или $ds=(3t^2-12t+9)dt$. Интегрируя, находим $\int ds=\int(3t-^2 12t+9)dt$; $s=t^3-6t^2+9t+C_2$. Используя начальные условия *t=0*, $s_\circ=10$, имеем $10=0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0+C_2$, т.е. $C_2=10$. Таким образом, $s=t^3-6t^2+9t+10$.

б) Найдем *а*, υ и s при t=*2*: $a=6\cdot 2-12=0;$ $\upsilon=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3(м/с);$

$s=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2+10=12м.$

в) Исследуем функцию, определяющую изменение скорости, на максимум и минимум:

$$\upsilon=3t^2-12t+9, \quad \upsilon'=6t-12, \quad 6t-12=0,\ t=2;\ \upsilon''=6>0.$$

Следовательно, скорость является наименьшей при *t=2с*. **59)** Согласно условию, тела начали двигаться из одной и той же точки, поэтому расстояния, пройденные ими до встречи, равны. Найдем законы движения каждого из тел:

$$s_1=\int(3t^2-6t)dt=t^3-3t^2; \qquad s_2=\int(10t+20)dt=5t^2+20t.$$

Постоянные интегрирования при начальных условиях *t=0*, *s=0* равны нулю. Встреча этих тел произойдет при условии: $s_1=s_2\Rightarrow t^3-3t^2=5t^2+20t\Rightarrow$

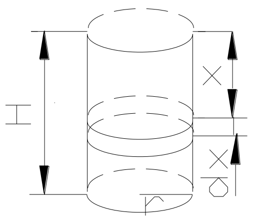
$$t(t^2-8t-20)=0, \text{т.е. } t_1=0,\ t_2=-2,\ t_3=10.$$

Таким образом, встреча этих тел произойдет в момент *t=10с*.

Подставив значение *t=10* в равенство, определяющее закон движения любого из тел (например, первого), найдем расстояние, пройденное каждым телом до встречи: $s_1=s_2=10^3-3\cdot 10^2=700м.$ **60)** Скорость точки равна нулю в момент начала движения и в момент ее остановки. Определим, в какой момент точка остановится; для этого решим уравнение $12t-3t^2=0$, откуда $t(4-t)=0,\ t_1=0,\ t_2=4$. Теперь найдем путь

$$s=\int_0^4(12t-3t^2)dt=\left[6t^2-t^3\right]_0^4=32м.$$

61) Выделим на глубине *x* горизонтальный слой



высотой *dx* (рис.). Работа *A*, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом *P* на высоту *x*, равна *Px*.

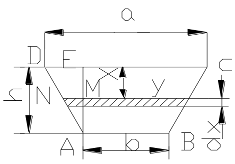
Изменение глубины *x* на малую величину *dx* вызовет изменение объема *V* на величину $dV=\pi r^2dx$ и изменения веса *P* на величину $dP=9807\pi r^2dx$; при этом совершаемая работа *A* изменится на величину $dA=9807\pi r^2x\,dx$. Проинтегрировав это равенство при изменении *x* от *0* до *H*, получим:

$A=\int\limits_0^H 9807\pi r^2 x\,dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi\cdot 0{,}25\cdot 2^2 = 4903\pi(дж)$. **62)** Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний , пройденных первым и вторым телом за *5с:*

$$s_1=\int\limits_0^5\left(6t^2+2t\right)dt=\left[2t^3+t^2\right]_0^5=275м,$$

$$s_2=\int\limits_0^5\left(4t^2+5\right)dt=\left[2t^2+5t\right]_0^5=75м.$$

Тогда получим $s_1-s_2=275-75=200м.$ **63)** Пусть заштрихованная полоска расположена на глубине *x* (рис.) и имеет размеры *y* и *dx*. Приближенное значение силы давления воды на эту полоску составляет $\Delta P\approx xy\,dx=dP$. Выразим переменную *y* через *x* и размеры трапеции *a, b* и *h.* Из подобия треугольников *ADE* и *ANM* имеем $DE:NM=AE:AM$. Так как $DE=(a-b)/2$, $NM=(y-b)/2$, *AE=h* и *AM=*$h-x$, то, подставив эти значения в пропорцию, получим $\frac{a-b}{y-b}=\frac{h}{h-x}$, откуда $y=a-\frac{a-b}{h}x$.



Следовательно, $dP=x\left(a-\frac{a-b}{h}x\right)dx$**.** Интегрируя *dP* при изменении *x* от 0 до *h*, находим

$$P=\int\limits_0^h\left(ax-\frac{a-b}{h}x^2\right)dx=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{a-b}{3h}x^3\right]_0^h=\frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

64) а) Изменение длины нити $2ds=\frac{8f}{3l}df$, б) изменение стрелки провеса: $df=\frac{3l}{4f}ds$.

65) $10\sqrt{26}\approx 51\frac{км}{час}$; вектор скорости параллелен гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого горизонтален и равен 50*км,* а другой вертикален и равен 10 км. **66)** $\frac{20\sqrt{3}}{3}см.$ **67)** Длина балки равна $13\frac{1}{3}$ *м*, сторона поперечного сечения $-\frac{2\sqrt{2}}{3}м.$ **68)** Разделив *z* на υ, вводим новую функцию $y=\frac{z}{\upsilon}=\frac{0{,}3}{\upsilon}+0{,}001\upsilon^2$, которая определяет собой удельный расход топлива, выраженный в тоннах, на один километр пути. По условию задачи надо найти такое υ, при котором *y* имеет минимум. Для этого вычислим первую и вторую производные:

$$y'=-\frac{0{,}3}{\upsilon^2}+0{,}002\upsilon;\quad y''=\frac{0{,}6}{\upsilon^3}+0{,}002$$

и, решив уравнение $y'=0$, получаем ответ:

$$\upsilon_{\min}=\sqrt[3]{150}\approx 5{,}3км/час;\quad (т.к.\, y''(\upsilon_{\min})>0)$$

69) Сечение желоба имеет форму полукруга. **70)** Стороны основания равны каждая $2a+\sqrt[3]{2\upsilon}$, высота вдвое меньше: $\left(a+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\upsilon}\right)$. **71)** Сила f притяжения тела землей есть функция от его расстояния x до центра земли: $f(x)=\dfrac{\lambda}{x^2}$, где λ - постоянная. На поверхности земли эта функция равна весу тела P, а x равно радиусу земли R, поэтому $P=\dfrac{\lambda}{R^2}$. Отсюда $\lambda=PR^2$ и, следовательно, $f(x)=\dfrac{PR^2}{x^2}$.

При подъеме ракеты с поверхности земли на высоту h переменная x изменяется от $x=R$ до $x=R+h$.

Искомую работу находим по формуле:

$$A=\int_a^b f(x)dx=PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2}=PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

При $P=2\cdot 10^2\ H$, $h=15\cdot 10^5\,м$ и $R=6400\text{ км}=2^6\cdot 10^5\,м$ получим:

$A=\dfrac{2\cdot 10^4\cdot 2^6\cdot 10^5\cdot 15\cdot 10^5}{2^6\cdot 10^5+15\cdot 10^5}=\dfrac{192}{79}\cdot 10^{10}\approx 24{,}3\cdot 10^{10}(\text{Дж})$. **72)** Будем считать, что центр тяжести вагона перемещается по горизонтальной прямой. Начало координат поместим в начальном положении центра тяжести вагона.

Проектируя внешние силы, приложенные к вагону, на ось абсцисс, получим два слагаемых: силу тяги, равную *1200t* (*t* – время, прошедшее с момента включения реостата), и силу сопротивления, равную *200H.*

Согласно второму закону динамики, дифференциальное уравнение движения вагона имеет вид

$$\frac{P}{g}\ \frac{d^2x}{dt^2}=1200t-2000 \qquad (1)$$

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Так как начало движения не совпадает с моментом выключения реостата, то время t_0, соответствующее началу движения, можно определить из условия равенства силы тяги и силы сопротивления:

$1200t_0=2000\Leftrightarrow t_0=\dfrac{5}{3}c$. Для удобства вычисление положим $1200t-2000=1200t_1$, откуда имеем $t_1=t-\dfrac{5}{3}$.

Тогда уравнение (1) можно записать в виде $\dfrac{d^2x}{dt_1^2}=\dfrac{1200g}{P}t_1$.

Интегрируя дифференциальное уравнение (1), получаем

$$\frac{dx}{dt_1}=\frac{1200g}{P}\ \frac{t_1^2}{2}+C_1.$$

Подставляя начальные условия $\dfrac{dx}{dt_1}=0$ при $t_1=0$, находим $C_1=0$;

следовательно, $\dfrac{dx}{dt_1}=\dfrac{1200g}{P}\dfrac{t_1^2}{2}$. Интегрируя это уравнение, получим $x=\dfrac{1200g}{P}\ \dfrac{t_1^3}{6}+C_2$.

Так как *x=0* при $t_1=0$, то $C_2=0$. Следовательно, уравнение движения вагона примет вид

$x=\dfrac{1200g}{P}\ \dfrac{t_1^3}{6}=\dfrac{1200\cdot 9{,}81}{6\cdot 10^5}\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^3$ или $x=0{,}01962\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^3$. **73)** Пусть скорость движения катера в момент времени t равна υ. Тогда на движущийся катер действует сила сопротивления воды $F=-k\upsilon$. Согласно закону Ньютона $F=ma=m\dfrac{d\upsilon}{dt}$, следовательно,

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon \qquad \text{или} \qquad \frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{k}{m}\upsilon.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его общим решением будет функция

$$\upsilon(t)=Ce^{-\frac{R}{m}t} \qquad (1)$$

Постоянную С найдем из начального условия $\upsilon(0)=20\,км/ч$: $20=\mathrm{C}e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\cdot 0}\Leftrightarrow C=20$.
Итак, скорость движения катера после выключения двигателя определяется формулой $\upsilon=20e^{-\frac{R}{m}t}$. Найдем значение постоянной $e^{-\frac{R}{m}}$. Для этого воспользуемся условием, что при $t=40\ с=1/90ч$ $\upsilon=8км/ч$: $8=20e^{-\frac{R}{m}\cdot\frac{1}{90}}\Leftrightarrow e^{-\frac{R}{m}}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{90}$.

Положив в равенстве (1) $t=2мин=1/30ч$ и $e^{-\frac{R}{m}}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{90}$, найдем искомую скорость:

$\upsilon=20\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^{90}\right)^{\frac{1}{30}}=\dfrac{32}{25}=1{,}28\,км/ч$. **74)** Объем бруса составляет $V=5\cdot4\cdot100=2000(см^3)$. Тогда плотность $\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{14600}{2000}=7{,}3(г/см^3)$.

75) Нужно найти объем четырехугольной призмы с боковым ребром $1км$. Объем такой призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на длину ребра: $V=S_{сеч}l$. В данном случае $l=1000\,м$, а $\mathrm{S}_{сеч}$ равна площади трапеции с основаниями $\mathrm{a}=8м$ и $\mathrm{b}=20м$ и высотой $\mathrm{h}=5м$ (глубина канала), т.е.

$S_{сеч}=\dfrac{a+b}{2}h=\dfrac{(8+20)}{2}\cdot5=70(м^2)$. Отсюда находим $V=S_{сеч}l=70\cdot1000=70000(м^3)$.

76). Согласно закону Архимеда, камень вытесняет столько воды, сколько ее помещается в объеме камня. Но объем вытесненной воды равен объему цилиндрического столбика воды высотой $h=12{,}5см$ и радиусом основания $r=18/2см=9см.$ Следовательно, объем камня

$V=\pi r^2h=\pi\cdot9^2\cdot12{,}5\approx32000(см^3)=3{,}2дм^3$. **77)** Разобьем пластинку на *n* тонких полосок. На глубине *x* выделим одну из них (на рис. она заштрихована) и обозначим через Δx ее ширину, полоску за прямоугольник, найдем площадь ΔS:

$\Delta S\approx KM\cdot\Delta x$

Из подобия треугольников FDC и KBM имеем:

$\dfrac{KM}{AC}=\dfrac{BE}{BD}$, или $\dfrac{KM}{0{,}3}=\dfrac{x}{0{,}6}$, откуда $KM=\dfrac{1}{2}x$. Следовательно, $\Delta S\approx\dfrac{1}{2}x\Delta x$. (1)

Тогда силу ΔP давления жидкости на полоску площади ΔS можно определить по формуле $P=9{,}807\rho sh$,

где ρ - плотность жидкости в $кг/м^3$, S – площадь площадки в $м^2$, h – глубина погружения площадки в $м$.

Тогда $\Delta P\approx9{,}807\rho x\ \Delta S$ или, учитывая равенство (1),

$$\Delta P\approx9{,}807\cdot1000x\cdot\frac{1}{2}x\Delta x=4903{,}5x^2\Delta x.$$

Суммируя элементарные давления ΔP на каждую из n полосок, найдем приближенное значение силы P давления жидкости на всю пластинку:

$$P \approx \sum_{0}^{0,6} 4903{,}5x^2\Delta x.$$

При неограниченном увеличении числа n делений данной пластинки $\Delta x \to 0$, поэтому, по определению, полагаем

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{0}^{0,6} 4903{,}5x^2\Delta x. \quad \text{Таким образом,}$$

$$P = \int_{0}^{0?6} 4903{,}5x^2 dx = 4903{,}5 \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{0,6} = 1634{,}5 \cdot 0{,}216 \approx 353H.$$

78. Объем полученного конуса составляет $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1440}{7{,}2} = 200(см^3)$. С другой стороны, объем конуса есть $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = 10\pi r^2$.

Отсюда $r = \sqrt{\frac{V}{10\pi}} = \sqrt{\frac{20}{\pi}} = \sqrt{6{,}4} \approx 2{,}5(см)$. **79)** Найдем площадь боковой поверхности колонны: $S_{бок} = 2\pi r H = 2\pi \cdot 0{,}8 \cdot 5{,}5 \approx 28(м^2)$.

Вычислим общее количество олифы: $m \approx 28 \cdot 0{,}25 = 7(кг)$.

80) Ответ: $x \approx 52{,}8см$ (с точностью до $1мм$.). *Указание.* Точка опоры должна совпадать с точкой приложения равнодействующей силы, т.е. должна делить отрезок между точками приложения действующих сил на части, обратно пропорциональные этим силам. **81)** Ответ: $x = 1{,}05м$. *Указание.* На опору *B* давит половина веса балки, т.е. *40кг.* Значит, от груза в *200кг* на ее долю должно пасть *110 – 40 = 70кг*, а на долю опоры *A*- остальные *130кг.* Принимаем точку *A* за начало координат и делим отрезок *AB* в отношении *70:130=7:13*. **82)** *176526 Дж.* **83)** Квадрат со стороной $d/\sqrt{2}$.

84) $M_{\max} = gl^2/8$. **85)** $\upsilon = 41{,}62 км/ч.$

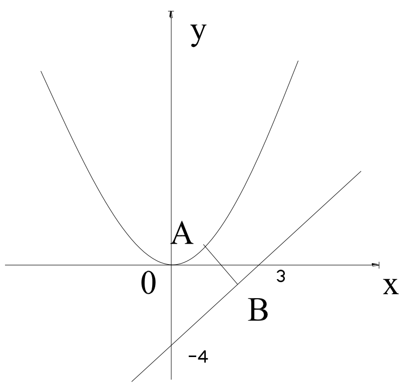
86) $\upsilon = 50$; $f'(100) = 18л$; $f'(75) = 12{,}4л$; $f'(50) = 10{,}5л$; $f'(40) = 10{,}8л$ на каждые *100 км* пути.

87) $\approx 23кг.$ **88)** *121,5м.* **89)** $\approx 69кг.$ **90)** $t^0 = \frac{2}{3}x,\ Q = 864000 кал.$ Указание. По закону Ньютона, скорость распространения теплоты через площадку, имеющую площадь *A*, равна $Q = -kA\frac{dT}{dx}$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид $\frac{dI}{dx} = k,$ где k – коэффициент теплопроводности. **91)** $\approx 104{,}4кг.$ **92)** *116м.* **93)** *19,69; при x =4x.*

94) Решение. Пусть $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ - искомые точки, соответственно, на параболе и прямой. Тогда имеем $y_A = \frac{2}{3} \cdot x_A^2$. Используем формулу расстояния от точки до прямой:

$$d = \left|\frac{4x_A - 3y_A - 12}{5}\right| = \frac{\left|4x_A - 2x_A^2 - 12\right|}{5} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left[(x_A - 1)^2 + 5\right]}{5} \Rightarrow$$



$\Rightarrow \min$ будет при $x_A = 1 \Rightarrow y_A = \frac{2}{3}$; $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$; $d = 2$.

Найдем точку $B(x_B, y_B)$. Угловой коэффициент данной прямой $k = \frac{4}{3} \Rightarrow k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Составим уравнение прямой *AB:* $y - \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}(x - 1)$

и решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_B - 3y_B - 12 = 0 \\ y_B - \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x_{B-1}) \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{13}{5};\ -\frac{8}{15}\right)$$

Ответ: Оптимальным будет канал, соединяющий точку $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$на параболе и точку В$\left(\frac{13}{5};\ -\frac{8}{15}\right)$ на прямой. **95)** Средняя интенсивность нагрузки $q_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{\Delta x}$. Интенсивность в любом сечении $q = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = q(x)$, а при равномерном распределении нагрузки $q = const$.

96) Достаточно доказать существование конечной производной $y'(x)$.

Литература

1. Назаров А.И. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.- 576 с.
2. Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.- 240 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 17-е изд. М., «НАУКА», 2006.
4. Высшая математика, специальные разделы. Решебник под ред. А.И. Кириллова. ФИЗМАТЛИТ М-2003г.

«Некоторые прикладные задачи по высшей математике»
(Методическое пособие)

Курбанов Курбан Османович

Подписано в печать 18.03.2011г. Формат 60×84\16

Объем1,1 п.л., уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Заказ 17.

Типография МФ МАДИ (ГТУ),

367026, Махачкала, пр. И.Шамиля 1