ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МАХАЧКАЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКОГО АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНОГО ИНСТИТУТА
(ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА)

Кафедра Математики и Информатики

Курбанов К.О., Нурмагомедов А.М., Джамалудинова З.М.

Ряды и их приложения

Методические указания и задания для типовых расчетов

Махачкала 2009

УДК 517
Методические указание и задания для типового расчета по теме
«Ряды и их приложения» Махачкала, МФ МАДИ (ГТУ), 2009, стр. 36

Цель данных методических указаний - помочь студентам вторых курсов в изучении темы «Ряды и их приложения». Для этого в методических указаниях приводится необходимая теория с решенными примерами, а также типовой расчет по данной теме.

Методические указания могут быть использованы также и студентами заочной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛИ: к. ф-м. н., доц Джамалудинова З.М.,
к. ф-м. н., доц Курбанов К.О.,
к. ф-м. н., доц Нурмагомедов А.М.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: д.т.н., проф. МФ МАДИ (ГТУ) Баламирзоев А.Г.,
к. ф-м. н., проф. ДГТУ Хийирбеков Т.Э.

Печатается согласно постановления Ученого совета
Махачкалинского филиала МФ МАДИ (ГТУ) от 27 октября 2009г.

Содержание

Глава 1.ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§1. Общие сведения.

Бесконечная сумма вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (1)$$

где a_n – некоторые числа, называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются членами, а a_n - общим членом этого ряда.

Сумма первых n членов ряда называется $n - й$ частичной суммой ряда и обозначается символом S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а число S – суммой ряда. В этом случае пишут: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если же этот предел не существует, то ряд называется расходящимся.

Сумма вида $R_n = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} a_m$ называется остатком ряда (1).

Справедливы следующие свойства:

1. Сходимость или расходимость ряда сохранится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.
2. Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$.
3. Если ряд (1) сходится, его сумма равна S и λ – число, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ также сходится и его сумма равна λS.
4. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы ,соответственно, равны S и σ, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

Необходимый признак сходимости ряда: если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Однако, заметим, что выполнение условия (2) еще не гарантирует сходимость данного ряда. Действительно, можно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

(называемый гармоническим) расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Пример 1. Ряд $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ называется рядом геометрической прогрессии со знаменателем q. Пусть $a \neq 0$. Тогда, как известно, $S_n = \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Легко видеть, что предел последнего выражения при $|q| < 1$ равен $S = \dfrac{a}{1-q}$.Если же $|q| \geq 1$,то этот предел либо не существует (при $q = -1$), либо равен бесконечности (при остальных значениях q) .

Таким образом, ряд геометрической прогрессии сходится только при $|q| < 1$ и его сумма в этом случае равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}$.

Решение. Составим частичную сумму:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)} =$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Следовательно, сумма ряда $S = 1$.

Упражнения

А. Даны формулы общих членов рядов:

$$1)a_n=\frac{2n^2+1}{\sqrt{2^n+1}};2)a_n=\frac{2+(-1)^n}{n!};3)a_n=\cos n\pi\cdot\sin\frac{\pi}{2^n};4)a_n=\frac{(2n-1)!!}{n^n\cdot\sqrt{n}}$$

Написать ряды в развернутом виде. (По определению $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n;\ 0!=1;\ (2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n;\ (2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Б. Найти формулу общего члена для следующих рядов:

$1)1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots;$ $2)\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots;$ $3)\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{15}+\frac{4}{31}+\ldots;$

$4)1+\frac{1\cdot3}{1\cdot2}+\frac{2\cdot4}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots;$ $5)\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{23}+\ldots;$

В. Найти суммы или установить расходимость следующих рядов:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^{n+1}};\quad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)};\quad 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$6)\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}2;\quad 7)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

§2. Сходимость рядов с положительными членами.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (3)$$

с положительными членами $a_n>0, n=1,2,3,\ldots$.

Приведем некоторые признаки сходимости таких рядов.

Признак сравнения I. Пусть даны ряды (3) и

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \qquad (4)$$

с положительными членами, причем для достаточно больших n выполняется неравенство: $a_n\le b_n$.

Тогда из расходимости ряда (3) следует расходимость ряда (4); из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3).

Признак сравнения II. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то оба ряда расходятся или сходятся одновременно. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3).

Сравнение обычно производится со следующими рядами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q|<1$ и расходящаяся при $|q|\ge 1$).

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд или ряд Дирихле, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\le 1$).

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$

Решение. Так как $\frac{n}{(n+1)3^n}<\frac{1}{3^n}$ при всех n и ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, где $q=\frac{1}{3}$, сходится, то по признаку *сравнения I* данный ряд также сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}\neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется. Ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения с гармоническим рядом. Так как $a_n=\frac{1}{n+\ln n}, b_n=\frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+\ln n)}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln n)/n+1}=1\neq 0$. Данный ряд расходится, как гармонический ряд.

Упражнения

А. Исследовать ряды на сходимость с помощью необходимого признака или признаков сравнений: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[0{,}5+(0{,}1)^n\right]$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{5n^2-2n+3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{4^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot arctg\frac{1}{3^n}$;

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ ряд (3) сходится, а при $p>1$ – расходится. Если же $p=1$, то вопрос остается открытым, т.е. в этом случае данный признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Примеры. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

Решение. Так как $a_n=\frac{n}{2^n}$,то $a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1$ - ряд сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$;

Решение. Так как $a_n=\frac{2^n}{n^{10}}$, то $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=2>1$-ряд расходится.

Упражнения

Б. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n\cdot n^5$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n\cdot\frac{1}{n^5}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n/2}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+2n^2+1)2^n}{n^2+1}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)\cdot 3^n}}{n\cdot 2^{n/2}}$;

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = p$, то при $p<1$ряд (3) сходится, при $p>1$ – расходится (при $p=1$ ряд может оказаться как сходящимся ,так и расходящимся).

Примеры. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Коши: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

Решение. По признаку Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ряд сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

Решение. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{2}e > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

Упражнения

В. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+4}{3n^2+5n+3}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+(0{,}1)^{n-1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+4}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+2)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{3^n\cdot n^{n^2}}$;

Интегральный признак сходимости

Пусть общий член ряда (3) $a_n = f(n) > 0$. Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x=n, n=1,2,3,\ldots$ значения $f(n)$, монотонно убывает в некотором промежутке $a<x<\infty$, где $a>1$, то ряд (3) и несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

*Примеры.*_Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$;

Решение. Применим интегральный признак $a_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$, $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^2 x}$. Эта функция непрерывна в промежутке $[2, \infty)$ и монотонно убывает. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}dx = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^b = \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \text{интеграл сходится} \Rightarrow$$

ряд расходится.

Можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p \ln^q}$: $a)$ сходится при любом q ,если $p > 1$ и при $q > 1$, если $p = 1$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$;

Решение: $a_n = \dfrac{1}{n}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \int_1^\infty \dfrac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty \Rightarrow$ интеграл расходится $\Rightarrow$ ряд расходится.

Ответ: гармонический ряд расходится.

Упражнения

Г. Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n \cdot \ln n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^2}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+n+2}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)}$;

§3. Знакопеременные ряды.

Ряд (1) с членами произвольных знаков называется знакопеременным. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \ . \qquad (5)$$

Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Ряд (1) называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд (5) расходится.

Среди знакопеременных рядов наибольший интерес представляют ,так называемые, *знакочередующиеся* ряды:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{6}$$

где $a_n > 0, n = 1,2,3,\ldots$.

Признак Лейбница. Если члены ряда (6), начиная с некоторого номера монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (6) сходится и для суммы S ряда справедлива оценка $0 < S \le a_1$.

Замечание. Остаток ряда (6) оценивается с помощью неравенства

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Примеры.

1) Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$;

Решение. Ряд является знакочередующимся. Применим признак Лейбница:

$a) \quad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots; \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ Данный ряд сходится .

Для проверки на абсолютную сходимость рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который расходится. Следовательно, ряд сходится условно.

2) Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + (0{,}1)^n\right)$;

Решение. Первое условие признака Лейбница, очевидно, выполняется: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$. Проверим второе условие: $\lim_{n\to\infty} \left[1 + (0{,}1)^n\right] = 1 \ne 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Упражнения. Исследовать на условную или абсолютную сходимость ряды: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 7^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^4}$;

§4. Функциональные ряды.

Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

членами которого являются некоторые функции от x, называются функциональными.

При различных значениях x из этого ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Определение. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x), u_2(x), \ldots$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется его областью сходимости.

Функция $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, а x принадлежит области сходимости, называется суммой ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ достаточно применить к нему известные признаки сходимости, считая x фиксированным.

Пример. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n+1}}$.

Так как $u_n(x)=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$, то $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{|x+1|}{2}$. Тогда по признаку Даламбера при $\frac{|x+1|}{2}<1$, т.е. $x\in(-3;1)$ ряд сходится абсолютно, а при $-\infty<x<-3$ или $1<x<\infty$ ряд расходится. При $x=1$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, при $x=-3$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который по признаку Лейбница сходится условно.

Изх всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются *степенные* ряды. Это - ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{7}$$

где $x_0,a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$- заданные числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

Ряд (7) с помощью подстановки $x-a=X$ можно привести к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+\ldots+a_nX^n+\ldots \tag{8}$$

Поэтому будем рассматривать ряды вида (8). Такие ряды всегда сходятся, по крайней мере, при $X=0$.

Если степенной ряд сходится при $x=x_0$, то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию $|x|<|x_0|$ (теорема Абеля).

Следствием теоремы Абеля является существование для всякого степенного ряда интеграла сходимости $|x|<R$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого расходится. Этот интервал называется интервалом сходимости, а число $R-$ радиусом сходимости степенного ряда. Радиус сходимости можно вычислять по одной из формул:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \textit{или} \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

при условии, что пределы существуют.

На концах интервала сходимости (т.е. в точках $x=\pm R$) степенной ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Если $R=0$, то степенной ряд сходится только при $x=0$. Если же $R=\infty$, то ряд сходится на всей числовой оси.

Интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда.

Примеры. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cdot x^n}{2^n}$.

Решение. Здесь $a_n=\frac{n^2}{2^n}, a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2}=2$.

Следовательно, ряд сходится в интервале $-2<x<2$. Исследуем сходимость на концах интервала. При $x=\pm 2$ данный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\cdot n^2$

Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимый признаку сходимости : $\lim\limits_{n\to\infty}(\pm 1)^n\cdot n^2\neq 0$. Ответ: $x\in(-2;2)$.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^n\cdot x^n$.

Решение. Здесь $a_n=n^n$. Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, сходятся только в точке $x=0$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{1}{n!}$ $,a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Следовательно, ряд сходится при всех значениях $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty\,,\infty)$.

Упражнения.

А.Найти область сходимости следующих рядов

1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$; 2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$; 3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$; 4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; 5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$;

6)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$; 7)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}$; 8)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5\,x^{2n}}$;

Б.Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; 2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$; 2)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$; 4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$; 5)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$; 6)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\cdot x^n$;

7)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{\sqrt{5^n\cdot(1+4n)}}$; 8)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\cdot(n+3)}$; 9)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n^2}\cdot(x+2)^n$; 10)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n\cdot x^n$;

11)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)^n}$; 12)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$; 13)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n\cdot\ln^2 n}$;

§ 5 Разложение функций в степенные ряды.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,\qquad(9)$$

называемый рядом *Тейлора*. Ряд, получаемый из (9) при $x_0=0$ называется рядом *Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots;\quad(|x|<\infty);\qquad\text{(а)}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots;\quad(|x|<\infty);\qquad\text{(б)}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots;\quad(|x|<\infty);\qquad\text{(в)}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots;\quad(|x|<1);\qquad\text{(г)}$$

$$(1+x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\cdot x^n}{n!}=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\ldots;(|x|<1); \qquad (\text{д})$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;\quad(-1<x\le 1); \qquad (\text{е})$$

$$arctg\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots;\quad(|x|<1); \qquad (\text{ж})$$

Примеры:

1)Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\sin^2 x$.

Решение. Так как $2\sin^2 x=(1-\cos 2x)$,то , применяя формулу (в), получаем

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\ldots\right)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6-\ldots$$

.

2)Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение. В разложении (а), заменяя x на $(-x^2)$, получаем, что

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n)!}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots;\quad(|x|<\infty);$$

3)Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в ряд по степеням $(x-2)$ и указать интервал сходимости полученного разложения.

Решение. Воспользуемся равенством $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1/2}{1+(x-2)/2}$. К правой части применим формулу (г),заменяя x на $\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots\right)=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+\ldots\ .$$

Полученный ряд сходится при $\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1$,т.е. при $x\in(0\,;4)$.

Упражнения

А. Разложить в ряды по степеням следующие функции и указать интегралы сходимости полученных рядов:

$$1)\cos 5x;\ 2)e^{3x};\ 3)\frac{x^2}{1+x};\ 4)\sin x^2;\ 5)5^x;\ 6)\frac{1}{\sqrt{e^x}};\ 7)2^{-x^2};\ 8)x^3\cdot arctg\,x;\ 9)\cos\frac{2x^3}{3};\ 10)\ \frac{2}{1-3x};$$

$$11)\ \frac{e^x-1}{x};12)\sqrt[3]{1+x};\ 13)\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}};\ 14)\ln(1-x);\ 15)x^5\cdot\ln(1+x^2).$$

Б. Разложить следующие функции в ряды Тейлора по степеням $(x-x_0)$ и указать интервалы сходимости полученных рядов:

$$1)\ln x,\ x_0=1;\quad 2)\sqrt{x},\ x_0=2;\quad 3)x^5,\ x_0=-2;\quad 4)\frac{1}{x},\ x_0=-2;\quad 5)\frac{1}{3+x},\ x_0=-2;\ 6)e^x,\ x_0=1;$$

$$7)\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{4};\qquad 8)\ln(5x+3),\ x_0=1;\qquad 9)\frac{1}{x^2-4x+3},\ x_0=-2;\qquad 10)\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ x_0=3;$$

$$11)\frac{1}{\sqrt{4+x}},\ x_0=-3;\ 12)\frac{1}{5+2x},\ x_0=3;$$

В. Найти первые 3-5 члена разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$1)\,tg\,x;\quad 2)\,e^{-x}\cdot\cos\sqrt{x};\quad 3)\arcsin^2 x;\quad 4)\,2^{\cos^2 x};\quad 5)\,arctg\frac{1}{1+x};\quad 6)\sqrt{1+\sin x};\quad 7)\,\frac{\ln(1+x)}{\cos x};$$

Г. Найти первые 3-4 члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$ следующих функций:

$$1)tg\,x,\ x_0=\frac{\pi}{4};\ 2)\frac{1}{\sin x},\ x_0=\frac{\pi}{2};\ 4)\,x^{\sqrt{7x+2}},\ x_0=-1;\ 5)\frac{1}{(1+x^2)^2},\ x_0=1;\ 6)\frac{1}{arctg\,x}\ x_0=1;$$

§ 6. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов.

Для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x_0 разлагают функцию в степенной ряд. В полученном разложении полагают $x=x_0$. Затем для вычисления $f(x_0)$ с нужной точностью берут необходимое число его начальных членов.

Для оценки погрешности нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов ряда.

Отметим следующие случаи:

1. При вычислении различных степеней числа e пользуются приближенной формулой $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, допуская при этом ошибку R_n, которая оценивается неравенством $|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n!(n+1-|x|)}$ при $|x| < n+1$.

При $x \le 0$ можно пользоваться более простой оценкой $|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. При вычислении значений синуса и косинуса пользуются приближенными формулами: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} .$$

При этом ошибки оцениваются соответственно неравенствами

$$|R_{2n-1}(x)| = |R_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad |R_{2n}(x)| = |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} .$$

3. Для вычисления логарифмов чисел можно пользоваться рядом

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \right) \qquad (|x| < 1).$$

Ошибка, получаемая при замене суммы ряда суммой его первых n членов, может быть оценена с помощью формулы

$$|R_n| < \left| \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} \right| .$$

4. При вычислении корней $k-ой$ степени из числа A полагают $A = a^2 + y$, (где a^k – число, близкое к A из которого извлекается точный корень, и такое, что $\left|y/a^k\right| < 1$). Тогда

$$\sqrt[k]{A} = a \cdot \sqrt[k]{1 + y/a^k} = a \cdot \left(1 + y/a^k\right)^{1/k} .$$

Полученную функцию разлагают в биноминальный ряд и берут затем необходимое число первых слагаемых.

Примеры.

1) Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до $0{,}00001$.

Решение. В разложении функции e^x полагаем $x = 1/4$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \dots .$$

Если взять пять членов этого ряда $(n = 4)$, то ошибка вычислений не будет превышать $0{,}00001$,так как

$$|R_4| < \frac{1}{4^5 \cdot 4!(5 - 1/4)} < 0{,}00001.$$

Подсчитав сумму пяти выписанных выше членов ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1{,}28403$.

2) Вычислить $\cos 1^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение. Так как $\cos 1^\circ = \cos\frac{\pi}{180}$, то полагая в разложении косинуса $x = \frac{\pi}{180}$, получаем, $\cos 1^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} \approx 0.9998$.

Здесь первые два члена разложения уже обеспечивают значительно большую точность, так как $|R_2| \le \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 4!} < 0{,}0000001$.

3) Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до $0{,}001$.

Решение: $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64 + 4} = 4 \cdot \sqrt[3]{1 + 1/16} = 4(1 + 1/16)^{1/3}$.

Подставляя $x = 1/16$ в разложении в ряд функции $(1 + x)^{1/3}$,получаем:

$$\sqrt[3]{68} = 4(1+1/16)^{1/3} \approx \left(1+\frac{1}{3\cdot 16}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 16^2}\right) \approx 4{,}082.$$

Здесь взятые три члена обеспечивают нужную точность, так как

$$|R_3| \le 4\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!\cdot 16^2} < 0{,}001..$$

Упражнения

Вычислить приближенно с указанной точностью ε:

1) $\sqrt{e}$, $\varepsilon = 0{,}0001$; 2) $\frac{1}{e}$, $\varepsilon = 0{,}0001$; 3) $\sin 9^\circ$, $\varepsilon = 0{,}0001$; 4) $\sqrt[3]{1{,}06}$, $\varepsilon = 0{,}0001$;

5) $\sqrt{27}$, $\varepsilon = 0{,}001$; 6) $\ln 0{,}98$, $\varepsilon = 0{,}0001$; 7) $\ln 1{,}1$, $\varepsilon = 0{,}0001$;

8) $\cos 40^\circ$, $\varepsilon = 0{,}0001$; 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$, $\varepsilon = 0{,}001$; 10) $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

11) $arctg\,\frac{\pi}{10}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

§ 7. Приближенные вычисления пределов, производных и интегралов с помощью степенных рядов.

При вычислении пределов некоторых отношений разлагают числитель и знаменатель дроби в степенные ряды (по степеням одной и той же разности). После необходимых сокращений неопределенность обычно исчезает.

С помощью рядов Тейлора можно находить числовые значения производных любого порядка от данной функции. В частности, чтобы найти $f^{(n)}(a)$, нужно разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$, а затем по формуле $f^{(n)}(a) = C_n \cdot n!$ вычислить нужную производную (указанная формула получается из общего выражения $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ для коэффициентов ряда Тейлора).

Для вычисления неопределенных и определенных интегралов надо разложить в ряд подынтегральную функцию. Таким путем удается вычислить ряд интегралов, не выражающихся через элементарные функции в конечном виде, а также некоторые интегралы, вычисление которых другими способами представляют значительные трудности.

Примеры. 1)Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right]$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\cdot\cos x-3\sin x}{x^4\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dots\right)-3\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dots\right)}{x^5\left(1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dots\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{3}{5!}\right)x^5+\left(-\dfrac{1}{6!}+\dfrac{3}{7!}\right)x^7}{x^5}=\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}=\frac{1}{60}.$$

2)Найти производную 11-го порядка от функции $f(x)=x^5\cdot\cos\dfrac{x}{2}$ в точке $x=0$.

Решение. Разложим данную функцию в ряд Маклорена:

$$x^5\cdot\cos\frac{x}{2}=x^5\left[1-\frac{(x/2)^2}{2!}+\frac{(x/2)^4}{4!}-\frac{(x/2)^6}{6!}+\frac{(x/2)^8}{8!}-\dots\right]=$$

$$=x^5-\frac{x^7}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^9}{2^4\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{2^6\cdot 6!}+\frac{x^{13}}{2^8\cdot 8!}-\dots$$

Так как $f^{(11)}(0)=C_{11}\cdot 11!$,то $f^{(11)}(0)=-\dfrac{11!}{2^6\cdot 6!}=-866{,}25$.

3)Вычислить $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Используя разложение функции $\ln(1+x)$, имеем $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=$

$$=\int\limits_0^{0,1}\frac{x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\ldots}{x}dx=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots\right)\Big|_0^{0,1}=$$

$$=0,1-\frac{1}{4}\cdot 0,01+\frac{1}{9}\cdot 0,001-\ldots\approx 0,098.$$

Упражнения

А. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{tg^4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{arctg^3x}$;

Б. Найти значения производных, указанного порядка:

1) $e^{-x^2/2}$, $f^{(10)}(0)$; 2) $\frac{2x}{1+x^2}$, $f^{(6)}(0)$; 3) $x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}$, $f^{(5)}(0)$; 4) $\sqrt[3]{8+x}$, $f^{(5)}(0)$;

5) $x^6\cdot arctgx$, $f^{(12)}(0)$; 6) $(x-1)^2\cdot\ln x$, $f^{(5)}(1)$; 7) $\frac{x-2}{\sqrt{x}}$, $f^{(6)}(4)$; 8) $x^2\cdot e^{2x}$, $f^{(20)}(1)$;

9) $\frac{(x-1)^3}{5x+3}$, $f^{(6)}(1)$;

В. Вычислить интегралы с заданной точностью:

1) $\int\limits_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon=0,0001$; 2) $\int\limits_0^{1}e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=0,0001$; 3) $\int\limits_0^{1}\sqrt[3]{x}\cdot\cos x dx$, $\varepsilon=0,001$;

4) $\int\limits_0^{1/2}\frac{arctgx}{x}dx$, $\varepsilon=0,001$; 5) $\int\limits_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}dx$, $\varepsilon=0,0001$; 6) $\int\limits_5^{10}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$, $\varepsilon=0,001$;

§ 8.Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или обычные способы решения слишком громоздки, то его решение (частное или общее) удается отыскать в виде некоторого степенного ряда:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot(x-x_0)^n .$$

Неопределенные коэффициенты C_n $(n=0,1,2,\ldots)$ находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x-x_0$ в обеих частях полученного равенства.

Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y'=f(x,y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y(x_0)=y_0$, решение можно искать в виде ряда Тейлора: $$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $y_0=y(x_0), y'(x_0)=f(x_{0,}y_0)$, а дальнейшие производные находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y.y',\ldots$ значений $x_0, y_0, y_0',\ldots$ и всех остальных найденных последующих производных.

Аналогично можно интегрировать и уравнения высших порядков.

Примеры:

1) Найти общее решение уравнения $y''-x^2\cdot y=0$

Решение будем искать в виде ряда

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot x^n .$$

Подставляя y и y'' в уравнение, получаем

$$\left[2\cdot1\cdot C_2+3\cdot2\cdot C_3x+4\cdot3\cdot C_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\ldots\right]-$$
$$-x^2\left[C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots\right]\equiv0$$

Сгруппируя члены с одинаковыми степенями x и приравнивая все коэффициенты полученного ряда нулю, получаем:

$$C_2=C_3=0; C_{n+4}=\frac{C_n}{(n+4)(n+3)}\quad(n=0,1,2,\ldots).$$

Отсюда можно найти последовательно все коэффициенты разложения (C_0, C_1)остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования).

Ответ: $y(x)=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4k-1)\cdot 4k}+C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 4k\cdot(4k+1)}$.

2) Найти первые шесть отличных от нуля членов разложения в ряд решения уравнения $y'=x^2+y^2$, удовлетворяющего условию $y(0)=1$.

Решение. Из уравнения находим $y'(0)=0^2+1^2=1$. Дифференцируя уравнение, последовательно получаем $y''=2x+2y\cdot y'$, $y'''=2+2y'^2+2y\cdot y''$, $y^{(4)}=6y'\cdot y''+2y\cdot y'''$, $y^{(5)}=6y''^2+8y'\cdot y^{(4)}+2y\cdot y^{(4)}$.

Полагая $x=0$ и пользуясь значениями $y(0)=1, y'(0)=1$, последовательно находим $y''(0)=2$, $y'''(0)=8$, $y^{(4)}(0)=28$, $y^{(5)}(0)=144$. Искомое решение имеет вид

$$y(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\ldots\ .$$

Упражнения

А. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти общие решения уравнений:

1) $y''=y$; 2) $y''+2xy=0$; 3) $y'+xy=0$; 4) $y''+2xy'+y=0$; 5) $y''-xy'-2y=0$;

6) $(1-x)y''+xy'-y=0$; 7) $(1+x^2)y''+y=0$;

Б. Применяя метод последовательных дифференцирований, найти указанное число отличных от нуля членов разложения в ряд решений уравнений при указанных начальных условиях:

1) $y'=\arcsin y+x$, $y(0)=0{,}5$ (*четыре члена*); 2) $y'=x+1/y$, $y(0)=1$ (*четыре члена*) ;

3) $2y'-(x+y)\cdot y=e^x$, $y(0)=2$ (4 *члена*);4) $y''=y\cos y'+x$, $y(0)=1, y'(0)=\frac{\pi}{3}$ (*пять членов*) ;

5) $y''=x^2+y^2$, $y(-1)=2$ $y'(-1)=0{,}5$ (*семь членов*);

6) $y'+y\cdot\cos x-3e^x\cdot y^2-\sin x=0$ $y(0)=1$ (*четыре члена*) ;

§9. Ряды Фурье.

Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-\pi;\pi]$, и периодической с периодом 2π, называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,3,\dots)$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,3,\dots)$ - коэффициенты Фурье данной функции.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$, где l – произвольное число, то ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$. А если же $f(x)$- четная, то $b_n=0$, $a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,l]$, то для разложения в ряд Фурье надо доопределить ее на отрезке $[-l,0]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке $[-l,l]$.

Примеры:

1)Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$ выражением $f(x)=\pi+x$.

Решение. Определим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{bmatrix}u=\pi+x\Rightarrow du=dx\\ dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(\pi+x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right]=0,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nxdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\pi+x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\right]=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$f(x)=\pi+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\pi+2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\dots\right)$$

2)Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $[-1;1]$ выражением $f(x)=x^2$.

Решение. Данная функция является четной и $l=1$. Поэтому $b_n=0$,

$$a_0=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}\quad,\quad a_n=2\int_0^1 x^2\cos\pi nxdx=\begin{bmatrix} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=\cos\pi nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{\pi n}\sin nx \end{bmatrix}=$$

$$=2\left[\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nx\right]=\frac{-4}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nxdx=\begin{bmatrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin\pi nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos\pi nxdx\right]=\frac{4\cdot(-1)^n}{(\pi n)^2}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+\dots\right)$

Упражнения

Разложить в ряды Фурье периодические функции $f(x)$ с периодом T, заданные на указанных отрезках:

1) $f(x)=x$, $T=2\pi$, $[-\pi,\pi]$; 2) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } -\pi<x<0 \\ -1, \text{ если } 0<x<\pi\end{cases}$, $T=2\pi$, $[-\pi,\pi]$;

3) $f(x)=|x|$, $T=2$, $[-1,1]$;

4) $f(x)=\cos 2x$, $T=2\pi$, $[0,\pi]$.Разложить в ряд по синусам.

5) $f(x)=x$, $T=2$, $[0,1]$.Разложить в ряд по синусам.

6) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0<x\le 1 \\ 2-x \text{ при } 1<x\le 2\end{cases}$, $T=4$, $[0,2]$. Разложить в ряд по косинусам.

7) $f(x)=\pi-2x$, $T=2\pi$, $[0,\pi]$.Продолжить на отрезок $[-\pi,0]$: а) четным образом;

б) нечетным образом.

8) $f(x)=e^x$, $T=2\pi$, $[-\pi , \pi]$; 9) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } \pi/2<|x|<\pi \\ -x \text{ } при \text{ } |x|<\pi/2 \end{cases}$, $T=2\pi$, $[-\pi , \pi]$.

Ответы к главе 1.

§ 1

А. 1) $\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{9}{\sqrt{5}}+\frac{19}{\sqrt{9}}+\ldots+\frac{2n^2}{\sqrt{2^n+1}}+\ldots$; 2) $1+\frac{3}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2+(-1)^n}{n!}+\ldots$;

3) $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{16}-\ldots+(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$;

4) $1+\frac{3}{2^2\cdot\sqrt{2}}+\frac{15}{3^3\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{n^n\cdot\sqrt{n}}+\ldots$;

Б. 1) $\frac{1}{n^2}$; 2) $\frac{1}{3n}$; 3) $\frac{n}{2^{n+1}-1}$; 4) $a_1=1, a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n!}$; 5) $\frac{1}{n^2-n+3}$;

В. 1) 1 ; 2) 0,25 ; 3) 0,5 ; 4) $\frac{23}{90}$; 5) *расходится* ; 6) $\frac{\ln^2 2}{1-\ln^2 2}$; 7) 0,25 .

§ 2

А. 1) расходится; 2) расходится; 3) расходится; 4)сходится; 5) расходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) сходится; 9) сходится; 10) сходится.

Б. 1) сходится; 2); сходится 3) сходится; 4 сходится); 5) расходится;

6) сходится; 7) сходится; 8) сходится; 9) расходится; 10) расходится;

В. 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится;

6) сходится.

Г. 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится;4); расходится 5) сходится;

6) расходится; 7) сходится;

§ 3

1) сходится условно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится абсолютно; 4) сходится абсолютно;

§ 4

А.1) При $x>1$ сходится абсолютно, а при $x\le 1$ расходится. 2) При $x>1$ сходится абсолютно, при $0<x\le 1$ сходится условно , при $x\le 0$ расходится. 3) При $x>l$ сходится абсолютно, при $1<x\le l$ сходится условно, при $x\le 1$ расходится. 4)$x\in(-\infty;\infty)$. 5) $x\in(-\infty;\infty)$. 6) расходится везде. 7) сходится абсолютно при $x\ne 0$. 8) сходится при $x\ge 1$ и $x\le -1$.

Б.1) $[-1\,,1)$; 2) $[-1\,,1]$; 3) $(-5\,,5)$; 4) $[-1\,,1]$; 5) $(-\infty\,,\infty)$; 6) $x=0$; 7) $[-\frac{\sqrt{5}}{3}\,,\frac{\sqrt{5}}{3})$;

8) $[-1\,,3)$; 9) $(-2{,}5\,,-1{,}5)$; 10) $(-2\,,2)$; 11) $[-6\,,-4]$; 12) $[-\frac{1}{e}\,,\frac{1}{e}]$; 13) $[1\,,2]$;

§ 5

А. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty\,;\infty)$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{6n}}{(2n)!\cdot 3^{2n}}$, $[-1\,;1]$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cdot 3^n\cdot x^n}{(n)!\cdot}$, $(-\infty\,;\infty)$;

10) $2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n\cdot x^n$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}})$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 5\cdot x^n}{n!}$, $(-\infty\,;\infty)$;

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!\cdot}$, $(-\infty\,;\infty)$ $\left(\textit{считаем, что } f(0)=0\right)$'

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{n+2}$, $(-1\,;1)$;

12) $1+\frac{x}{4}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-5)\cdot x^n}{n!\cdot 4^n}$, $[-1\,;1]$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!\cdot}$, $(-\infty\,;\infty)$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!\cdot 2^n}$, $(-\infty\,;\infty)$;

13) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)x^n}{n!\cdot 5^n}$, $(-1\,;1]$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $[-1\,;1)$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln^n 2\cdot x^{2n}}{n!}$, $(-\infty\,;\infty)$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+5}}{n}$, $[-1\,;1]$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{2n-1}$, $[-1\,;1]$; 16) $x+2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n\cdot}\cdot x^{2n}}{2n-1}$, $[-1\,;1]$;

Б. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-1)^{n}}{m}$, $(0\,;2]$; 2) $\sqrt{2}\left[1+\frac{x-2}{4}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!\cdot(x-2)^{n}}{4n^{n}\cdot n!}\right]$, $[0\,;4]$;

3) $-32+80(x+2)-80(x+2)^2+40(x+2)^3-10(x+2)^4+(x+2)^5$-ряд содержит лишь шесть отличных от нуля членов; сходится при всех x.

4) $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n}}{2^{n}}$, $(-4\,;0)$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot(x+2)^{n}$, $(-3\,;-1)$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n!}$, $(-\infty\,;\infty)$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $(-\infty\,;\infty)$; 8) $\ln 8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n}\cdot(x-1)^{n}}{n}$, $(-\frac{3}{5}\,;\frac{13}{5}]$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 3^{n}}-\frac{1}{10\cdot 5^{n}}\right)(x+2)^{n}$, $(-5\,;1)$; 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(x-3)^{n}}{9^{n}\cdot n!}\right)$, $(0\,;6]$;

11) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(2n-1)!!\cdot}{(n)!\cdot 2^{n}}(x+3)^{n}$, $(4\,;-2]$; 12) $\frac{1}{11}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^{n}\cdot(x-3)^{n}}{11^{n}}$, $(-\frac{5}{2}\,;\frac{17}{2}]$;

В. 1) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$;

5) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\ldots$;

2) $1-\frac{3}{2}x+\frac{25}{24}x^2-\ldots$;

6) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+\ldots$;

3) $x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{8}{45}x^6+\frac{4}{35}x^8+\ldots$;

7) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{1}{2}x^4+\ldots$;

4) $2-(2\ln 2)x^2+\left(\ln^2 2+\frac{2}{3}\ln 2\right)x^4+\ldots$;

Г. 1) $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$;

2) $1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{5}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\ldots$; 3) $e^{\sqrt{2}}\left[1-\frac{x+1}{2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{(x+1)^2}{4}+\ldots\right]$;

4) $\frac{1}{4}-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{4}+\ldots$; 5) $\frac{\pi}{4}+\frac{8}{\pi^2}(x-1)+\frac{4(\pi+4)^2}{\pi^3}(x-1)^2+\ldots$;

§ 6

1) $1{,}6487$; 2) $0{,}3679$; 3) $0{,}1564$; 4) $1{,}020$; 5) $5{,}196$; 6) $0{,}0202$; 7) $0{,}0953$;

8) $0{,}7585$; 9) $0{,}302$; 10) $0{,}496$; 11) $0{,}304$;

§ 7

А. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$;

Б. 1) -945; 2) 0; 3) $\frac{105}{16}$; 4) $\frac{55}{2^{10}\cdot 3^5}$ 5) 0; 6) 40; 7) $-\frac{13}{2^{18}}\cdot 9!!$; 8) $2^{20}\cdot 116\cdot e^2$; 9) $-\frac{5625}{256}$;

В. 1) $0{,}4931$; 2) $0{,}7468$; 3) $0{,}608$; 4) $0{,}487$; 5) $0{,}2505$; 6) $0{,}384$;

§ 8

А. 1) $y = C_0\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + C_1\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

2) $y = C_0\cdot\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot 1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)x^{3n}}{(3n)!}\right) + C_1\cdot\left(x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)x^{3n+1}}{(3n+1)!}\right)$;

3) $y = C_0\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots\right) = C_0\cdot e^{-x^2/2}$;

4) $y = C_0\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!!}\right) + C_1\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n-1)!}\right)$;

5) $y = C_0\cdot\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n-1)!!}\right) + C_1\cdot\left(x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}\right)$;

6) $y = C_0\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n)!}\right) + C_1\cdot x = C_0\cdot e^x + C_1\cdot x$;

7) $y = C_0\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{(1+1\cdot 2)}{4!}x^4+\ldots\frac{(-1)^n(1+1\cdot 2)(1+3\cdot 4)\cdot\ldots\cdot[1+(2n-3)(2n-2)]}{(2n)!}x^{2n}+\ldots;\right)+$

$+C_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n(1+2\cdot 3)(1+4\cdot 5)\cdot\ldots\cdot(1+(2n-2)(2n-1))}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots\right)$;

$\left(c_{n+2} = \frac{1+(n-1)n}{(n+1)(n+2)}C_n\right)$.

Б. 1) $y = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}x+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)x^3+\ldots$;

2) $y = 1+x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$; 3) $y = 2+\frac{2}{5}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{89}{24}x^3+\ldots$;

4) $y = 1+\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)x^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot x^4+\ldots$;

5) $y=2+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{15}{16}(x+1)^4+\frac{1}{8}(x+1)^5+\frac{1}{3}(x+1)^6+\ldots$;

6) $y=1+2x+7x^2+\frac{61}{3}x^3+\ldots$;

§ 9

1) $2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\sin nx}{n}$;

2) $\frac{4}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

3) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$;

4) $-\frac{\pi}{4}\cdot\left[\frac{\sin x}{2^2-1}-\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$;

5) $\frac{2}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sin\pi nx}{n}$;

6) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$;

7) *а*) $\frac{8}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$; *б*) $2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$;

8) $\frac{sh\pi}{\pi}\cdot\left(1+2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(\cos nx-n\sin nx)}{1+n^2}\right)$;

9) $\frac{1}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi\cdot\cos\frac{n\pi}{2}-2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin nx$;

ГЛАВА 2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА НА ТЕМУ: « РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

1. Исследовать ряды на сходимость:

$$1.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n+1)^2};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1+2n}\right)^n;\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^3(n+1)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^2}{(n+2)^4};$$

$$2.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{2n^3};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{3n}(n+1)};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n+2}}{n+2};$$

$$3.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-5)^2}{2n^4};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n/2}};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^3}{2^{n-1}};$$

$$4.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+1};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^n;\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\ln n};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{2(n+2)};$$

$$5.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/16};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot tg\,\frac{\pi}{2^{n+1}};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)^{n/3};\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^2}{n\cdot2^n};$$

$$6.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n}};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+8}\right)^{n/2};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{\ln n};$$

$$7.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\sin\frac{1}{3^n}\right)^n;\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot\ln^2(3n+1)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^5}{2^n\cdot3^{n-1}};$$

$$8.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/9};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right)^n;\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot\sqrt{\ln(3n-1)}};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt[3]{3n-1}}\cdot;$$

$$9.а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\cdot\ln n};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3+n}{n^4+2n-1};$$

$$10. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n+1};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot\ln^2 n};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$11. а)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^2;\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\cdot\ln n};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n-1}{n^3-3};$$

$$12. а)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{-n^2};\ г)\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\cdot\sqrt{\ln(n-3)}};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+2}{3n^3-1};$$

$$13. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2};\ .б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n/2}};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1+3n}\right)^{2n};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\cdot\ln^2(5n+2)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{3+n^2}};$$

$$14. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(5n+5)};$$

$$д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-n}{1+n^2}\right)^n;$$

$$15. а)\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{4n};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)5^n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-6)\cdot\sqrt{\ln(n-2)}};\ д)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^2\ln n};$$

$$16. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(n-2)\cdot\ln(n-2)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^3}{n^5+n+2};$$

$$17. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(n+2)};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\ln^2(3n+1)};$$

$$д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{(n+5)^3};$$

$$18. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+1};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)}{\sqrt{n\cdot 3^n}};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot\ln^2(2n+1)};$$

$$д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot 3^n}{n!};$$

$$19. а)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-n^2}{1+n^3}\right)^3;\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}}{3^n\cdot(2n-1)};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n^2+1)^{n/2}};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-31)\cdot\ln(2n-3)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^n}{n!};$$

$$20. а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3}{2^n+1};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n\cdot 2^{n-1}};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2};\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot\ln^2(5n+25)};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{n^3\cdot\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{6n+1}\right)^{3n}$; г) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{3}-1\right)\cdot\ln^2(n-3)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{\sqrt{n!}}$;

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot\ln(4n+2)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n+3}}$;

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+4)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{(n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\cdot\ln(2n-4)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}$;

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\cdot arctg\,\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot e^{-n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot\ln(3n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+2}$;

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot tg^2\frac{\pi}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\cdot n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot\sqrt{\ln(5n)}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$;

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n(n+2)(n+3)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{(n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-4}\right)^{n/5}$; г) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\cdot\ln^2(n^2-3)}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+2}$;

2. Найти интервалы сходимости и исследовать границы:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot(n+1)}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot n\cdot(x-1)^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{2^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^{n-1}}{n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n(n+1)}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n}$;
12) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot x^n$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{\sqrt[n]{n}}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2\cdot x^n}{2^n}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 5^n}$;
17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{(1+4n)\cdot 6^n}}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}$; 20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot x^n}{(n+1)(n+2)}$; 21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{3n^2+1}$;
22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)x^n}{(n+1)8^n}$; 23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; 24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{4^n\cdot(2n-1)}$; 25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\cdot(3n+1)}$; 26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$;

3. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$ и указать интервалы сходимости:

1) $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{4}$;
3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=-3$;
2) $f(x)=\sin 3x$, $a=-\frac{\pi}{3}$;
4) $f(x)=\frac{1}{4+3x}$, $a=-2$;

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=4$;

6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=-1$;

7) $f(x)=\cos 2x$, $a=\frac{\pi}{4}$;

8) $f(x)=\ln(2+3x)$, $a=2$;

9) $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $a=0$;

10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $a=1$;

11) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, $a=1$;

12) $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt[3]{2-x}}$, $a=1$;

13) $f(x)=\ln(x^2-5x+6)x$, $a=1$;

14) $f(x)=\cos^2 x$, $a=\frac{\pi}{2}$;

15) $f(x)=2\cos 3x\cdot\cos 2x$, $a=\frac{\pi}{2}$;

16) $f(x)=\sin 2x\cdot\cos 2x$, $a=\pi$;

17) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$, $a=0$;

18) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=0$;

19) $f(x)=arctg\,2x$, $a=0$;

20) $f(x)=\arcsin 3x$, $a=0$;

21) $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$, $a=0$;

22) $f(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$, $a=-2$;

23) $f(x)=\frac{x}{3+x}$, $a=0$;

24) $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$, $a=0$;

25) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$, $a=\frac{\pi}{4}$;

26) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$, $a=0$;

4. Вычислить с точностью до 0,001:

1) *а)* $\sqrt[10]{1000}$; *б)* $\int_0^{1/2} x^2\cdot\arcsin x\,dx$;

2) *а)* $\frac{1}{e}$; *б)* $\int_0^{1/2} x^2\cdot\arcsin x\,dx$;

3) *а)* $\ln 1{,}25$; *б)* $\int_0^{0{,}1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

4) *а)* $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; *б)* $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$;

5) *а)* $\ln 0{,}75$; *б)* $\int_0^{,1/3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

6) *а)* $l\sin 16^\circ$; *б)* $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}dx$;

7) *а)* $\cos 9^\circ$; *б)* $\int_0^{0{,}5}\frac{1}{1+x^5}dx$;

8) *а)* $\sqrt[5]{33}$; *б)* $\int_0^{0{,}5}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$;

9) *а)* $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; *б)* $\int_0^{0{,}5}\ln(1+x^2)dx$;

10) *а)* $\cos 23^\circ$; *б)* $\int_0^{0{,}5}\sqrt{x\cdot\cos 2x}\,dx$;

11) *а*) $\sin 5^\circ$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} x\cdot\sin\sqrt{x}dx$;

12) *а*) $\arcsin\frac{1}{3}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} arctgx^2 dx$;

13) *а*) $e^{1/6}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$;

14) *а*) $\ln 2$; *б*) $\int\limits_0^{0,8} x^{10}\cdot\sin xdx$;

15) *а*) $\sqrt[3]{80}$; *б*) $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x}\cdot\cos xdx$;

16) *а*) $\sqrt[5]{250}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2/2}dx$;

17) *а*) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \cos x^2 dx$;

18) *а*) $\sqrt[6]{738}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

19) *а*) $\ln 5$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx$;

20) *а*) $arctg\frac{1}{2}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos x}{x}dx$;

21) *а*) $\sqrt[4]{90}$; *б*) $\int\limits_0^{0,5} \sin x^3 dx$;

22) *а*) $\frac{1}{\sqrt[3]{136}}$; *б*) $\int\limits_0^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$;

23) *а*) $\sin^2\frac{\pi}{9}$; *б*) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

24) *а*) $\ln 3$; *б*) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$;

25) *а*) $\sqrt[3]{8{,}36}$; *б*) $\int\limits_0^{0,4} e^{-x^2/2}dx$;

26) *а*) $\sqrt[3]{520}$; *б*) $\int\limits_0^{0,6} \sin x^2 dx$;

5. Найти указанное число n отличных от нуля членов разложения в ряд решений дифференциальных уравнений:

1) $y' = x^2 + y^2 - e^x$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

2) $y' = x + \arcsin y$, $y(0) = \frac{1}{2}$ $(n = 4)$;

3) $y' = 2x^2 + 3y\cos x + 2$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

4) $y' = 2x - 3\ln y + y$, $y(0) = 1$ $(n = 3)$;

5) $y' = xy + \ln(x + y)$, $y(1) = 0$ $(n = 5)$;

6) $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$ $(n = 5)$;

7) $y' = x^3 + y^2 - e^x$, $y(0) = 1$ $(n = 3)$;

8) $y' = x^2 y + x + e^y$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

9) $y' = \sin 2x + xy$, $y(0) = 1$ $(n = 3)$;

10) $y' = x + \arcsin y$, $y(0) = \frac{1}{2}$ $(n = 4)$;

11) $y' = \frac{1 - x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$ $(n = 5)$;

12) $y' + y\cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$, $y(0) = 1$ $(n = 4)$;

13) $y' = \cos x + x + e^y$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

14) $y' = x\cos x + e^y + x$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

15) $y' = tgx + xy^2 - e^x$, $y(0) = 1$ $(n = 3)$;

16) $y' = y\cos^2 x - y^2\sin x + \ln(x + 1)$, $y(0) = 3$ $(n = 4)$;

17) $2y' - (x + y)y = e^x$, $y(0) = 2$ $(n = 4)$;

18) $y' = 2x^3 - y^2 - 2x$, $y(0) = 1$ $(n = 3)$;

19) $y' = \ln(x+1) + e^{x}$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

20) $y' = x^{2} + \sin y + 1$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

21) $y' + 2xy^{2} - 4y = e^{3x}$, $y(0) = 2$ $(n = 4)$;

22) $y'' = y\cos y' + x$, $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{\pi}{3}$ $(n = 5)$;

23) $y'' = e^{y} \cdot \sin y'$, $y(\pi) = 1, y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$ $(n = 5)$;

24) $y'' = (y')^{2} + xy$, $y(0) = 4, y'(0) = -2$ $(n = 5)$;

25) $y' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 1, y'(1) = 0$ $(n = 6)$;

26) $y' = \sin 2x + \cos y$, $y(0) = 0$ $(n = 3)$;

6.Разложить функции в ряд Фурье:

1) $f(x) = x - 1$ *в интервале* $(-1\,;1)$;

2) $f(x) = |x|$ *в интервале* $(-\pi\,;\pi)$;

3) $f(x) = |x| + 2$ *в интервале* $(-1\,;1)$;

4) $f(x) = x^{2} + 1$ *в интервале* $(-2\,;2)$;

5) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ *в интервале* $(-\pi\,;\pi)$;

6) $f(x) = |x - 1|$ *в интервале* $(-2\,;2)$;

7) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } -\pi < x < 0 \\ 1 \text{ при } 0 \le x < \pi \end{cases}$ *в интервале* $(-\pi;\pi)$;

8) $f(x) = x + 1$ *в интервале* $(-\pi\,;\pi)$;

9) $f(x) = 2 - x$ *в интервале* $(-\pi\,;\pi)$;

10) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } -1 < x < 0 \\ -1 \text{ при } 0 \le x < 1 \end{cases}$ *в интервале* $(-1;1)$;

11) $f(x) = 4 - 2x$ *в интервале* $(-2\,;2)$;

12) $f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -\pi < x < 0 \\ \pi \text{ при } 0 < x < \pi \end{cases}$ *в интервале* $(-\pi;\pi)$;

13) $f(x) = \begin{cases} -(x+2) \text{ при } -2 < x \le 0 \\ -(x-2) \text{ при } 0 < x < 2 \end{cases}$ *в интервале* $(-2;2)$;

14) $f(x) = \begin{cases} -2x \text{ при } -\pi < x < 0 \\ 2x \text{ при } 0 \le x < \pi \end{cases}$ *в интервале* $(-\pi;\pi)$;

15) $f(x) = 2 - x$ *в интервале* $(-\pi\,;\pi)$;

16) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi < x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{2} x \text{ при } 0 < x < \pi \end{cases}$ *в интервале* $(-\pi;\pi)$;

17) $f(x) = 2 - x$ *в интервале* $(0\,;2)$ *по косинусам*;

18) $f(x) = x^{2}$ *в интервале* $(0\,;\pi)$ *по косинусам*;

19) $f(x) = x - 1$ *в интервале* $(0\,;\pi)$ *по синусам*;

20) $f(x) = \pi - x$ *в интервале* $(0\,;\pi)$ *по синусам*;

21) $f(x) = 2x - 1$ *в интервале* $(0\,;1)$ *по синусам*;

22) $f(x) = \pi x$ *в интервале* $(0\,;\,\pi)$ *по косинусам*;
23) $f(x) = x+1$ *в интервале* $(0\,;\,1)$ *по синусам*;
24) $f(x) = \sin 2x$ *в интервале* $(0\,;\,\pi)$ *по косинусам*;
25) $f(x) = \cos 3x$ *в интервале* $(0\,;\,\pi)$ *по синусам*;
26) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 < x < 1 \\ 2x \text{ при } 1 \le x < 2 \end{cases}$ *в интервале* $(0;2)$ *по синусам*;

Литература

1. Назаров А.И. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавров. СПб.: Изд. Лань, 2011.- 576 с.
2. Бараненков А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Изд. Лань, 2009.- 240 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 17-е изд. М., «НАУКА», 2006.
4. Высшая математика, специальные разделы. Решебник под ред. А.И. Кириллова. ФИЗМАТЛИТ М-2003г.

«Ряды и их приложения»
(Учебное пособие)

Курбанов К.О., Нурмагомедов А.М., Джамалудинова З.М.

Подписано в печать 18.03.2010г. Формат $60\times84\backslash16$

Объем 2,25 п.л., уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Заказ 17.

Типография МФ МАДИ (ГТУ),

367026, Махачкала, пр. И.Шамиля 1